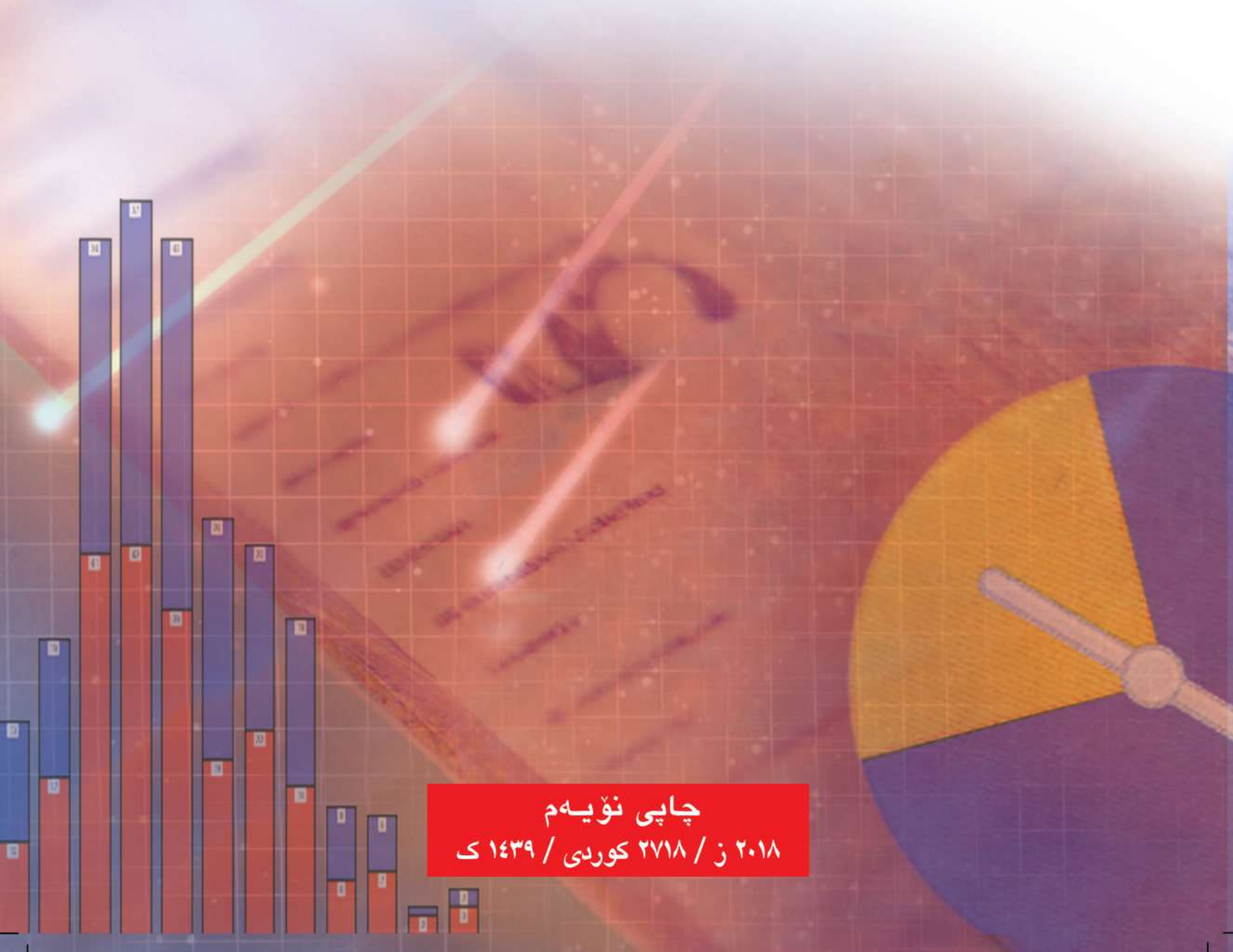
١٢

حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

کتێبی خوێندکار
پۆلی دوازدەهەمی وێژەیی



چاپی نۆیەم
٢٠١٨ ز / ٢٧١٨ کوردی / ١٤٣٩ ک

سەرپەرشتی زانستی چاپ: عبدالكريم شمعون هرمز
عبدالخالق مصطفى جوكل
صابر مولود أمين
سەرپەرشتی هونەری چاپ: عوسمان پیرداود کواز
ئاری محسن احمد
بژاری هونەری: یوسف احمد اسماعیل

Content-Student-g12 Literary 4/2/18 11:37 AM Page 2

ناوەرۆکی کتێبەکە

بەشی 1 ئامار و ئەگەر Statistics And Probability 1

بەشی 2 جەبر Algebra 27

بەشی 3 نەخشەکان Functions 51

ناوەڕۆکی کتێبەکە

ئامار و ئەگەر

Statistics and Probability

بەشی

1



وانەکان

1. ڕوونکردنەوەی سمێڵی.
2. ئەگەری مەرجی و ئەگەری گشتگر.
3. نموونە هێڵییەکان.

وانەی 1

ڕوونکردنەوەی سمێڵی

Box-and-Whisker Plot



بۆچی؟

دەتوانیت ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ بەراوردکردنی پەرتبوونی پێدراوەکان لە دوو کۆمەڵە پێدراوی لێکچوو بەکاربهێنین وەک ناوەڕاستەی مانگانەی پلەی گەرما.

ئامانجەکان

- چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم بۆ کۆمەڵە پێدراوێك دەدۆزێتەوە.
- مەودا و مەودای چواریەکی بۆ کۆمەڵە پێدراوەکانی چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم هەژماردەکات.
- ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ نواندنی پەرتبوونی کۆمەڵە پێدراوێك دەکێشێت.

زاراوەکان Vocabulary

چواریەکی یەکەم
First quartile

چواریەکی سێیەم
Third quartile

مەودای چواریەکی
Interquartile range

ڕوونکردنەوەی سمێڵی
Box-and- Whisker-Plot

چەمکی پەرتبوون

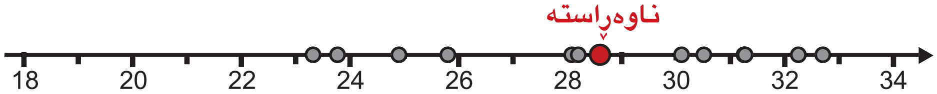
لە دوو خشتەی بەرامبەر ناوەڕاستەکانی پلەی گەرما لەماوەی 12 مانگ بۆ هەردوو هاوینەهەواری سەرچنار لە سلێمانی و سۆلاف لە دهۆك دەردەکەوێت. ناوەڕاستەی بەهایەکانی خشتەی یەکەم دەکاتە 27.355 و ناوەڕاستەی بەهایەکانی خشتەی دووەم دەکاتە 28.51 ئەگەر بەهایەکانی ئەم دوو خشتە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنن ئەوا دەبینین:

ناوەڕاستەی پلەکانی گەرما بۆ شاری سەرچنار	
کانونی دووەم	16.63
شوبات	17.8
ئادار	22.94
نیسان	26.37
ئایار	32.61
حوزەیران	35.62
تەمووز	37.06
ئاب	36.81
ئەیلول	33.06
تشرینی یەکەم	28.34
تشرینی دووەم	22.5
کانونی یەکەم	14.35

ناوەڕاستەی پلەکانی گەرما بۆ شاری سۆلاڤ	
کانونی دووەم	23.32
شوبات	23.77
ئادار	25.8
نیسان	28.08
ئایار	30.51
حوزەیران	31.25
تەمووز	32.7
ئاب	32.25
ئەیلول	31.27
تشرینی یەکەم	30.1
تشرینی دووەم	28.2
کانونی یەکەم	24.9



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر تەوەری ژمارەکان



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

تێبینیبکە کە ناوەڕاستەی خشتەی دووەم 28.51 بەشێوەیەکی باشتر کۆمەڵە بەهایەکانی دەردەبڕێت لە ناوەڕاستەی یەکەم، چونکە زۆربەی بەهایەکانی خشتەی دووەم لە ناوەڕاستە نزیکن لەوکاتەی زۆربەی بەهایەکانی خشتەی یەکەم دوورن لە ناوەڕاستەکەی، بۆیە دەتوانین بڵێین کە بەهایەکانی خشتەی یەکەم زیاتر پەرتترن لە بەهایەکانی خشتەی دووەم.

ئامارناسان پێوانەکان و ئامێرە ڕوونکردنەوەکانی کە زۆر وردن بەکاردەهێنن بۆ دەربڕینی پەرتبوونی کۆمەڵە پێدراوەکان. لە پۆلی یازدەمدا فێربوویت چۆن هەندێك لە پێوەرەکانی پەرتبوون هەژمار بکەیت و بەکاریانبهێنیت وەك مەودا و لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی.
لەم وانەدا فێردەبیت چۆن بەهایەکانی دیکە هەژماربکەیت و بەکاریانبهێنیت لەگەڵ نواندنی پەرتبوون بە ڕوونکردنەوەیی.

چالاکی

دۆزینەوەی چواریەکەکان

لە خشتەی خوارەوە تێکڕاکانی مانگانەی باران بارین دەردەکەوێت (بە مللیلیتر) لەیەکێك لە شارەکان لەماوەی 12 مانگدا.

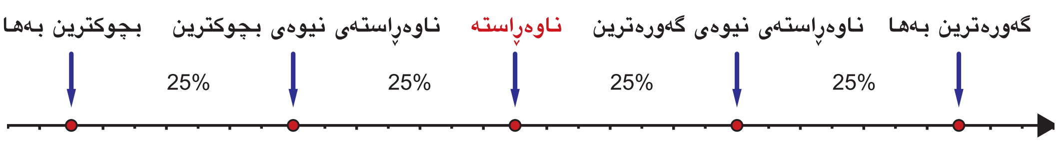
مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تێکڕا	48	57	71	89	124	76	58	56	86	89	58	46

1. ناوەڕاستەی ئەو تێکڕایانە بدۆزەوە، ڕێژەی سەدی پێدراوەکان کە لە ناوەڕاستە کەمترن چەندە؟ ڕێژەی سەدی پێدراوەکان کە لە ناوەڕاستە زیاترن چەندە؟

2. ناوەڕاستەی ئەو کۆمەڵەیە بدۆزەوە کە لە تێکڕایەکانی کەمترە لە ناوەڕاستە، ڕێژەی سەدی ئەو تێکڕایانەی کە لە ناوەڕاستە کەمترن بدۆزەوە؟

3. ناوەڕاستەی ئەو کۆمەڵەیە بدۆزەوە کە لە تێکڕایەکانی زیاترە لە ناوەڕاستە، ڕێژەی سەدی ئەو تێکڕایانەی کە لەو ناوەڕاستە زیاترن بدۆزەوە؟

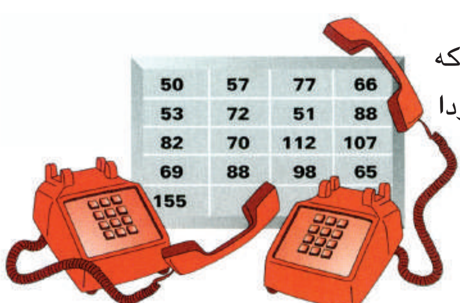
دەتوانیت ئەوەی لە چالاکیەکەی پێشوو ئەنجامتدا وەك خوارەوە بینوێنیت.



ئامارناساکان بە ناوەڕاستەی نیوەی بچوکترین دەڵێن چواریەکی یەکەم و بە Q_1 هێمای دەکەن و بەناوەڕاستی نیوەی گەورەترین دەڵێن چواریەکی سێیەم و بە Q_3 هێمای دەکەن، بەڵام چواریەکی دووەم Q_2 تەنها ناوەڕاستە وەهەروەها ئامارناسان بە $Q_3 - Q_1$ دەڵێن مەودای چواریەکی و بە IQR هێما دەکەن و هەر بەهایەك لە کۆمەڵە پێدراوەکان کەمتربێت لە $Q_1 - 1.5 \times IQR$ یان زیاتر بێت لە $Q_3 + 1.5 \times IQR$ پێی دەڵێن بەهای پەڕگر(قيمة متطرفة).

نمـــونـــه 1

لە وێنەی بەرامبەر ژمارەی ئەو تەلەفۆنانە دەردەکەوێت کە مەڵبەندی ئاگرکوژێنەوەی شاری دهۆك لەماوەی 17 ڕۆژدا وەریگرتوون، بەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێردراون.



أ گەورەترین بەهاو بچوکترین بەهاو ناوەڕاستە و چواریەکی یەکەم و سێیەم و لەگەڵ مەودا و مەودای چواریەکی بۆ کۆمەڵەی بەهایەکان لەوێنەی بەرامبەر بدۆزەوە.

ب بەها پەڕگرەکان، ئەگەر هەبوو لە کۆمەڵەکەدا بدۆزەوە.

شیکار

أ سەرەتا بەهایەکان بەرەو ژوور ڕیزبکە:

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

ژمارەی پێدراوەکا دەکاتە 17، کە ژمارەیەکی تاکە ئەمەش وادەکات ناوەڕاستە بکاتە بەهای نۆیەم واتە $Q_2 = 72$ ، چواریەکی یەکەم دەکاتە ناوەڕاستەی کۆمەڵە پێدراوەکانی 70، 69، 66، 65، 57، 53، 51، 50 لەبەرئەوەی ژمارەی ئەو پێدراوانە جووتە (8) ئەوا ناوەڕاستەی نیوەی بچوکترین دەکاتە ناوەڕاستەی ئەو دوو بەهایەی دەکەونە ناوەند واتە 57 و 65 کەواتە $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$، لەلایەکی تر پێدراوەکانی نیوەی گەورەترین دەکاتە 107، 98، 88، 88، 82، 77، 155، 112. ئەوانیش ژمارەیان جووتە (8) و ناوەڕاستەی ئەو کۆمەڵەیە دەکاتە ناوەڕاستەی ئەو دوو بەهایەی دەکەونە ناوەند واتە 88 و 98 کەواتە $Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$.

گەورەترین بەها دەکاتە 155 و بچوکترین بەها دەکاتە 50 مەودا دەکاتە $155 - 50 = 105$ و مەودای چواریەکی دەکاتە $93 - 61 = 32$ دەتوانیت ئەوەی پێیگەیشتی بەم شێوەیە پوختبکەیەوە.

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

بچوکترین بەها ← 50؛ چواریەکی یەکەم ← 61؛ ناوەڕاستە ← 72؛ چواریەکی سێیەم ← 93؛ گەورەترین بەها ← 155

$IQR = 32$

مەودا= 105

ب بۆ دۆزینەوەی بەهای پەرگر، دەستبکە بە هەژمارکردنی هەریەك لە $Q_1 - 1.5 \times IQR$ $Q_3 + 1.5 \times IQR$.

$Q_1 - 1.5 \times IQR = 61 - 1.5 \times 32 = 13$ و $Q_3 + 1.5 \times IQR = 93 + 1.5 \times 32 = 141$

بەهایەك نییە کەمتربێت لە 13، لەکاتێکدا یەك بەها هەیە (155) گەورەتربێت لە 141، ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت یەك بەهای پەرگر هەیە ئەویش دەکاتە 155.

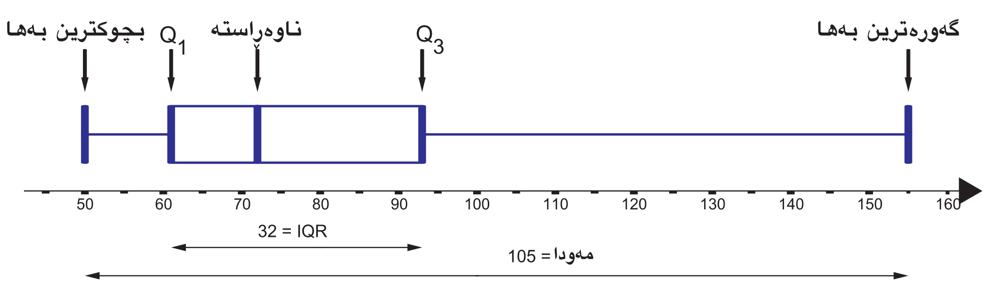
هەوڵبدە گەورەترین بەها و بچوکترین بەها و ناوەڕاستە و چواریەکی یەکەم و سێیەم و لەگەڵ مەودا و مەودای چواریەکی بۆ کۆمەڵەی بەهایەکانی خشتەی خوارەوە بدۆزەوە، بەها پەرگرەکان بدۆزەوە.

50	31	34	24	37	35	2	34	31	9	7	4
83	78	69	60	57	52	13	8	2	36	33	11

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئایا دەتوانیت بوونی بەهای پەرگر لە نمونەی 1 لێکبدەیتەوە؟

ڕوونکردنەوەی سمێڵی

ڕوونکردنەوەی سمێڵی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەییە چۆنیەتی پەرتبوونی بەهایەکان لە کۆمەڵە پێدراوەکان دەردەخات، ئەمەی خوارەوە ڕوونکردنەوەی سمێڵییە بۆ کۆمەڵە پێدراوەکانی نمونەی 1.



سەرنجبدە کە ڕوونکردنەوەی سمێڵی بە پێنج بەهای ئاماری دیاریدەکرێت: گەورەترین بەها و بچوکترین بەها و ناوەڕاستە و چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم.

بیرکردنەوەی رەخنەگرانە کام بەش لە رووونکردنەوەی سمێڵی 50%ی پێدراوەکان دەنوێنێت؟

هەنگاوەکانی دروستکردنی رووونکردنەوەی سمێڵی	
هەنگاوی 1	ریزکردنی بەهاکان بەرەوژوور و هەژمارکردنی ناوەراستە و چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم.
هەنگاوی 2	کێشانی هێڵی ژمارەکان کە بەهای گەورەترین و بچوکترین تێدا دیاری کرابێت.
هەنگاوی 3	کێشانی لاکێشەیەك لەبەهای Q_1 بۆ بەهای Q_3 درێژدەبێتەوە.
هەنگاوی 4	کێشانی هێڵێکی ئەستون لە بەهای ناوەراستەدا کە دەکەوێتە لاکێشەکەوە.
هەنگاوی 5	کێشانی پارچە راستەهێڵێکی ئاسۆیی لە Q_1 درێژدەبێتەوە هەتا بچوکترین بەها و پارچە راستەهێڵێکی ئەستون لە بچوکترین بەها، پاشان کێشانی پارچە راستەهێڵێکی ئاسۆیی لە Q_3 درێژدەبێتەوە هەتا گەورەترین بەها و پارچە راستەهێڵێکی ئەستون لە گەورەترین بەها.

نموونە 2

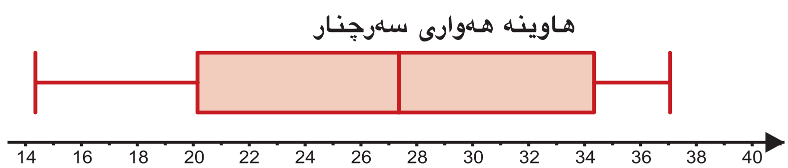
بە گەرانەوە بۆ نموونەکەی سەرەتای وانەکە، رووونکردنەوەی سمێڵی بۆ تێکرای پلەکانی گەرما بۆ هەریەك لەهەردوو هاوینەهەواری سەرچنار و سۆلاڤ بکێشە، پاشان بە بەکارهێنانی دوو رووونکردنەوە سمێڵییەکە و بەراورد لەنێوان دوو کۆمەڵەکە بکە.

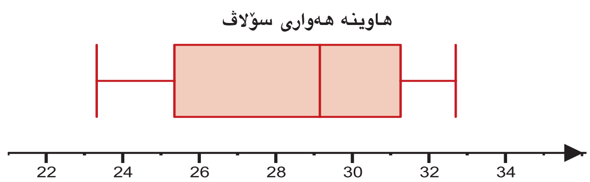
شیکار

سەرەتا پێنج بەها لەهەر کۆمەڵەیەك هەژماربکە ئەو ئەنجامانەی خوارەوت دەستدەکەوێت:

	سۆلاڤ	سەرچنار
بچوکترین بەها	23.32	14.35
چواریەکی یەکەم	25.35	20.15
ناوەراستە	29.15	27.36
چواریەکی سێیەم	31.26	34.34
گەورەترین بەها	32.70	37.06

پاشان رووونکردنەوەی سمێڵی بۆ هەر کۆمەڵەیەك بکێشە.





درێژبوونەوەی لاکێشەکە و سمێڵەکان لە رووونکردنەوەی سەرچناردا ئەوە دەردەخات کە پلەکانی گەرما لە هاوینەهەواری سەرچنار زیاتر گۆرانی بەسەردادێت وەك لە پلەکانی گەرما لە هاوینە هەواری سۆلاڤ چونکە لاکێشەکە و دوو سمێڵەکە کەمتر درێژبوونەتەوە. بە بەراودکردنی نێوان دوو رووونکردنەوەکان ئەوە دەردەخات کە کەمترین تێکرای پلەکانی گەرما لەهاوینەهەواری سۆلاڤ بەرزترە لە کەمترین تێکرای گۆرانی گەرما لە هاوینەهەواری سەرچنار، وە بەرزترین تێکرای گۆرانی پلەکانی گەرما لە سۆلاڤ کەمترە لە بەرزترین تێکرای گۆرانی گەرما لەهاوینەهەواری سەرچنار.

هەوڵبدە مەودای چواریەکی تێکراکانی پلەکانی گەرمای هەریەك لە هاوینەهەواری سەرچنار و سۆلاڤ بدۆزەوە چیت دستدەکەوێت لەو دوو بەهایە؟

بیرکردنەوەی رەخنەگرانە ئایا دەکرێت رووونکردنەوەی سمێڵی تەنها لا سمێڵێك بێت؟ بەبێ سمێڵ بێت؟ وەڵامەکەت رووونبکەوە؟

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیركاری

1 جیاوازی نێوان دۆزینەوەی ناوەڕاستە و چواریەكی یەكەم و سێیەم بۆ كۆمەڵەیەك لە 20 بەهاو كۆمەڵەیەك لە 15 بەها ڕوونبكەوە.

2 ڕوونكردنەوەی سمێڵی چیت بۆ دەردەخات لەبارەی كۆمەڵەی ئەو پێدراوانەی كە دەینوێنێت؟

3 دوو كۆمەڵە پێدراو دروستبكە ناوەڕاستەی هەریەكێكیان 7 و چواریەكی یەكەم $Q_1 = 5$ و چواریەكی سێیەم $Q_3 = 11$ بێت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

4 **ژینگە** لە خشتەكە درێژییەكانی 24 زیندەوەر(بە مللیمەتر) لە جۆرێكی دیاریكراو لە زیندەوەرەكان دەردەكەوێت.



28	30	38	34	36	31	28	25
32	34	27	29	30	26	33	35
29	38	31	25	29	31	25	37

أ بەهای بچوكترین و بەهای گەورەترین و ناوەڕاستە و چواریەكی یەكەم و سێیەم و مەودا و مەودای چواریەكی بۆ ئەو پێدراوانە بدۆزەوە.

ب بەدوای بەهای پەڕگر ئەگەر لە كۆمەڵەكەدا هەبوو بگەڕێ و دیاریبكە.

5 **كۆبوونەوە** لە خشتەی بەرامبەر ڕێژەی سەدی ئەو ئافرەتانەی كاردەكەن لە ژمارەیەك وڵاتە پێشكەوتووەكان بۆ ساڵەكانی 1980 و 1992 دەردەكەوێت.

1992	1980	وڵات
42.1	36.4	ئوستراليا
45.5	39.7	كەنەدا
43.8	39.5	فەرەنسا
42.0	38.0	ئەڵمانیا
40.5	38.4	یابان
48.3	45.2	سوید
44.9	40.4	بەریتانیا
45.7	42.4	وڵاتە یەكگرتوەكان

أ ناوەڕاستە و چواریەكی یەكەم و سێیەم بۆ پێدراوەكانی هەریەك لە دوو ساڵەكە بدۆزەوە.

ب ڕوونكردنەوەی سمێڵی بۆ پێدراوەكانی هەریەك لە دوو ساڵەكە بكێشە.

ج بەراورد لە نێوان دوو ڕوونكردنەوەكە بكە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

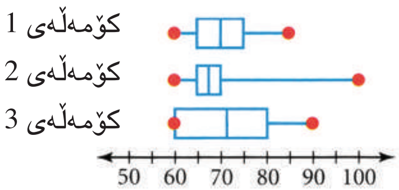
بۆ هەر كۆمەڵەیەك بەهای بچوكترین و بەهای گەورەترین و ناوەڕاستە و چواریەكی یەكەم و چواریەكی سێیەم و مەودا و مەودای چواریەكی بدۆزەوە، پاشان ڕوونكردنەوەی سمێڵی بۆ هەریەكەیان دروست بكە.

6 42، 45 ،56 ،48 ، 59 ،60 ، 51 ، 54 ، 44 ، 51 ،50 ، 44 ، 42 ، 49، 56.

7 22 ، 50 ، 78 ، 22 ، 77 ، 93 ، 27 ، 86 ، 14.

8 8 ، 2 ، 8 ، 2 ، 8 ، 3 ، 2 ، 2 .

3 کۆمەڵە خوێندکار هەڵسان بە ئەنجامدانی هەمان تاقیکردنەوە. ڕوونکردنەوەی سمێڵی بەکاربهێنە بۆ نمرەکانی ئەو سێ کۆمەڵە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکانی 9 هەتا 12.



9 کام کۆمەڵە بەرزترین نمرە گەورەکانی هەبوو؟

10 کام کۆمەڵە گەورەترین مەودای هەبوو؟

11 کام کۆمەڵە گەورەترین ناوەڕاستەی هەبوو؟

12 کام کۆمەڵە گەورەترین مەودای چواریەکی هەبوو؟

13 خشتەی خوارەوە درێژییەکانی 24 زیندەوەر لە جۆرێکی دیاریکراو لە زیندەوەرەکان بە سانتیمەتر ڕووندەکاتەوە.

3.0	2.6	3.3	3.5	2.8	3.0	3.8	3.4	3.6	3.1	2.8	2.5
2.9	3.8	3.1	2.5	2.9	3.1	2.5	3.7	3.2	3.4	2.7	2.9

أ بەهای بچوکترین و بەهای گەورەترین و ناوەڕاستە و چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم و مەودای چواریەکی ئەو پێدراوانە بدۆزەوە.

ب ئایا ئەو کۆمەڵە بەها پەرگەکان لەخۆدەگرێت؟ ئەگەر وەڵامەکە بەڵێیە ئەو بەهایانە چیین؟

ڕوانین بۆ دواوە

14 ناوەڕاستە و باو لە ئەم پێدراوانە بدۆزەوە. 2، 16، 4، 11، 14، 8، 17، 19، 13، 19، 9، 15، 8، 13، 17.

15 مەودا و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە. 12، 73، 11، 96، 45، 21، 16، 98، 13.

ڕوانین بۆ پێشەوە

16 شیرین لە پۆلی یازدەمدایە و خوشکەکەشی شلێر لە پۆلی دوازدەمدایە، لەهەر پۆلێك بۆ دیاریکردنی نوێنەر هەڵبژاردن ئەنجامدرا ئەگەری هەڵبژاردنی شلێر و خوشکەکەی شیرین چەندە ئەگەر بزانیت لە پۆلی یازدەم 30 خوێندکار و لەپۆلی دوازدەم 25 خوێندکار هەیە؟

وانەی 2

ئەگەری مەرجی و ئەگەری گشتگر

Conditional and Total Probabilities



بۆچی؟ شیکەرەوە ڕامیارییەکان دەتوانن پشت ببەستن بە پێدراو دیمۆگرافیەکان و ئەگەرەکان بۆ پێشبینیکردنی ئەنجامەکانی هەڵبژاردن.

ئامانجەکان

- ئەگەری ڕووداوێك دەدۆزێتەوە بەزانینی ئەوەی کە ڕووداوێکی تر هاتۆتەدی.
- مەرجی سەربەخۆیی دوو ڕووداو دیاریدەکات و بەکاریدەهێنێت.
- یاسای ئەگەری گشتگر دیاردەکات و بەکاریدەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

ئەگەری مەرجی
Conditional probability
ڕووداوە سەربەخۆیەکان
Independent events
ئەگەری گشتگر
Total Probability

ئەگەری مەرجی

لە زۆربەی تاقیکردنەوە هەرەمەکییەکان پێویستمان بە دیاریکردنی ئەگەری ڕووداوی A دەبێت لەکاتێکدا ڕووداوی B هاتۆتەدی وەك ئەوەی بزانیت ئەگەری ئەوەی کەسێك هەرەمەکی هەڵبژێردرابێت و دەنگی بە لیستی 725 دابێت ئەگەر بزانیت ئەو لە پارێزگای سلێمانییە، بۆیە ئەگەر ڕووداوی B ((کەسی هەڵبژێردراوبێت لە سلێمانی)) و A ((کەسێك بێت دەنگی بە لیستی 725 دابێت))، ئەوانەی لەبواری بیرکاریدا کاردەکەن نووسینی $P(A/B)$ بەکاردەهێنن بۆ دەربڕینی هاتنەدی A ئەگەر بزانین B ڕوویدابێت و بەو ئەگەرە دەڵێن ئەگەری مەرجی.

پێناسەی ئەگەری مەرجی

با B هەر ڕووداوێکی هەرەمەکی بێت لە بۆشایی نمونەی S دا ڕوودەدات. کاتێك $P(B)\neq 0$.

ئەگەری ئەوەی ڕووداوێك وەك A ڕووبدات بۆ یەکەمجار بەمەرجێ B ڕوویدابێت.

بەم شێوەیە پێناسەدەکرێت:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

هێمای $P(A/B)$ بەم شێوەیە دەخوێندرێتەوە: ئەگەری ڕووداوی A بە مەرجێك B ڕوویدابێت.

نمـــونـــە 1

تورەگەیەك 10 گۆی سووری تێدایە لە 1 هەتا 10 ڕەنووسکراون، و 5 گۆی شین بە ژمارە تاکەکان لە 1 هەتا 9 ڕەنووسکراون. گۆیەك لە توورەگەکە ڕاکێشرا. ئەگەری ئەوەی گۆیەکە بە ژمارە 9 ڕەنووسکرابێت و سووربێت بدۆزەوە.

شیکار

بۆشایی ئەگەرەکان لەکاتی ڕاکێشانی گۆی یەکەم بریتییە لە:

$\{1, 3, 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ڕووداوی B بریتییە لە ((گۆی سوور)) واتە $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

ڕووداوی A بریتییە لە ((گۆیەکە بە ژمارە 9 ڕەنووسکرابێت)) واتە $\{9, 9\}$.

بەڵام ڕووداوی $A\cap B$ بریتییە لە $\{9\}$.

لەوەی پێشوو دەردەچێت $P(B)=\frac{10}{15}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$ لەمەش $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{1}{10}$
کەواتە، ئەگەری ئەوەی گۆیەکە ڕەنووسی 9ی هەڵگرتبێت ئەگەر زانیت سوورە دەکاتە $P(A/B)=\frac{1}{10}$. پێویستە سەرنجی ئەوە بدەیت کە مەرجی سووربوونی گۆیە ڕاکێشراوەکە بۆشایی ئەگەرەکانی گۆڕیوە.

{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

و ڕووداوی A بوو بە ((ڕاکێشانی گۆیەك بە 9 ڕەنووسکرابێت)) لە توورەگەیەك 10 گۆی تێدابێت بە 1هەتا 10 ڕەنووسکراوی تێدایە ئەمەش وادەکات ڕوودانی ڕووداوی A کاتێك B ئەگەری هەڵبژاردنی گۆیەك بێت بە 9 ڕەنووسکرابێت لە نێوان 10 گۆی ڕەنووسکراو بە 1 هەتا 10 ، واتە $\frac{1}{10}$.

هەوڵبدە گۆیەك لە تورەگەیەك ڕاکێشرا 10 گۆی سووری تێدایە بە 1 هەتا 10 ڕەنووسکراوە و 5 گۆی شین بە ژمارە تاکەکانی لە 1 هەتا 9 ڕەنووسکراوە. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە بە ژمارە 3 ڕەنووسکرابێت بدۆزەوە، ئەگەر زانیت گۆیەکە شینە؟

نموونە 2

لە خشتەی بەرامبەر دەنگەکان (بە هەزاران) دابەشدەکرێت بەسەر 5 پارێزگای یەکێك لە وڵاتەکان کە هەڵبژاردنی سەرۆکایەتی تێدا ئەنجامدەدرێت کاتێك پاڵێوراوی 1 و پاڵێوراوی 2 دوو پاڵێوراوی سەرەکی بن.

پارێزگا	پاڵێوراوی 1	پاڵێوراوی 2	ئەوانی دیکە
1	581	472	5
2	345	336	4
3	349	207	3
4	260	210	3
5	148	197	5

أ ئەگەری ئەوەی دەنگدەرێك دەنگی بۆ پاڵێوراوی 1 دابێت بدۆزەوە، ئەگەر بزانیت ئەو دەنگدەرە لە پارێزگای 3 یە؟

ب ئەگەری ئەوەی دەنگدەرێك لە پارێزگای 2 بێت و دەنگی بۆ پاڵێوراوی 2 دابێت بدۆزەوە؟

شیکار

أ ئەگەر A ڕووداوی ((دەنگی بە پاڵێوراوی 1 دابێت)) و B ((دەنگدەرەکە لە پارێزگای 3 دابێت)) ئەوا داواکراو بریتییە لە دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداوی $P(A/B)=\frac{349}{559}\approx 0.624$. A ئەگەر B ڕوویدات.

ب ئەگەر A ڕووداوی ((دەنگدەرەکە لە پارێزگای 2 بێت)) و B ((دەنگی بە پاڵێوراوی 2 دابێت)) ئەوا داواکراو بریتییە لە دۆزینەوەی ئەگەری هاتنەدی ڕووداوی $A\cap B$.

$$P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$$

بەڵام $P(A/B)=\frac{336}{1422}$ $\quad P(B)=\frac{1422}{3125}$

کەواتە،

$$P(A\cap B)=\frac{1422}{3125}\times\frac{336}{1422}\approx 0.108$$

هەوڵبدە

أ ئەگەری ئەوەی دەنگدەرێك لە پارێزگای 5 بێت لەوانەیە پاڵێوراوێکی هەڵبژاردبێت لە پاڵێوراوە سەرەکییەکان نەبێت بدۆزەوە.

ب ئەگەری ئەوەی دەنگدەرێك لە پارێزگای 1 بێت و دەنگی بە پاڵێوراوی 1 دابێت بدۆزەوە.

ڕووداوە سەربەخۆیەکان

پێناسەی دوو ڕووداوی سەربەخۆ

بە دوو ڕووداوی A و B لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەوترێت دوو ڕووداوی سەربەخۆ ئەگەر ئەگەری ڕووداوی یەکێکیان کارنەکاتە سەر ڕوودانی یان ڕوونەدانی ئەویتریان، واتا ئەگەر $P(A/B)=P(A)$ و $P(B/A)=P(B)$.

ئەگەر دوو بەردە زارت هەڵدا، یەکێکیان سوور و ئەوتریان شین، ئەوا ئەگەری ڕووداوی A ((دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت لەسەر بەردە زارە سوورەکە)) کارناکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوی B ((دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت لەسەر بەردە زارە شینەکە)) یان ڕوونەدانی، ئەم دوو ڕووداوە سەربەخۆن.

ئەگەر ڕووداوی A و B سەربەخۆبن، ئەوا $P(A/B)=P(A)$ بەمەش

$$P(A)=P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ یان } P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مەرجی سەربەخۆبوونی دوو ڕووداو

دوو ڕووداوی A و B لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەبنە دوو ڕووداوی سەربەخۆ ئەگەر $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

نموونە 3

ئەگەر بگەڕێتەوە بۆ تاقیکردنەوەی هەڵدانی دوو بەردەزار بە هەرەمەکی سوور و شین، ئەگەری ئەوەی ئەو دوو ژمارەی لەسەر دوو بەردە زارەکە دەردەکەون جووت بن بدۆزەوە؟

شیکار

ئەگەر A ڕووداوی ((دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت لەسەر بەردەزارە سوورەکە)) و B ((دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت لەسەر بەردەزارە شینەکە)) بێت ئەوا $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$،

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە سەربەخۆن، ئەوا $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

هەوڵبدە

ڕێباز دوو بەردەزاری هەڵدا، سوور و شین، ئەگەری ئەوەی سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە 8 بێت بدۆزەوە، ئەگەر زانیت سەرجەمەکە جووتە؟ دەتوانیت ئەنجامەکە ساغبکەیتەوە ئەگەر بۆشایی ئەگەرەکانی ئەو تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەت پشکنی و ژمارەی دانەکانت هەژمارکرد لەلایەك و ژمارەی ئەو دانانەی پاسادانی ڕووداوی $A\cap B$ لەلایەکی تر هەژمارکرد، ڕێژەی دووەمت بۆ یەکەم دۆزییەوە.

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6

نمـــــونـــــه 4

ئەحمەد دوو كارتی لە 52 كارتی یاری ڕاكێشا، با A ڕووداوی «كارتی یەكەم كارتی (شا) بێت» و B ڕووداوی «كارتی دووەم كارتی (شا) بێت».



أ ئەحمەد پێش ڕاكێشانی كارتی دووەم كارتی یەكەمی گەڕاندەوە، ئایا دوو ڕووداوی A و B سەربەخۆن؟ ئەگەری ڕووداوی $A\cap B$ بدۆزەوە.

ب بەبێ ئەوەی ئەحمەد كارتی یەكەم بگەڕێنێتەوە، كارتی دووەمی ڕاكێشا. ئایا دوو ڕووداوەكە سەربەخۆن؟ ئەگەری ڕووداوی $A\cap B$ بدۆزەوە.

شیكار

أ لەكۆمەڵەی ئەو 52 كارتەی یاری، 4 كارتیان كارتی (شا)یە ئەگەری ڕووداوی A دەكاتە $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ ، و بەهەمان شێوە ئەگەری ڕووداوی B دەكاتە $P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ ، چونكە كارتی یەكەم بۆ كۆمەڵەی كارتەكان گەڕێنراوەتەوە. كەواتە، ئەگەری B ئەگەر بزانی كە A هاتۆتەدی بریتیەلە $P(B/A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}=P(B)$ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێ كە دوو ڕووداوەكە سەربەخۆن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{169}$

ب ئەگەری ڕووداوی A دەكاتە $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ و ئەگەری ڕووداوی B دەكاتە $P(B)=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$، چونكە كۆمەڵەكە پاش ڕاكێشانی كارتی یەكەم بووە بە 51 كارت كە 3 كارتی (شا)ی تێدایە، ئەگەری B ئەگەر بزانیت كە A هاتۆتەدی یەكسان نابێت بە ئەگەری B ، واتە $P(B/A)\neq P(B)$ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت كە دوو ڕووداوەكە سەربەخۆ نین.

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{17}=\frac{1}{221}$$

هەوڵبدە تورەگەیەك 5 گۆی سپی و 3 گۆی ڕەشی تێدایە، دوو گۆ یەك لەدوای یەك ڕاكێشرا لەهەر بارێك دیاریبكە ئایا دوو ڕووداوەكە سەربەخۆن یان نا؟

أ ڕووداوی A بریتییە لە ((گۆی یەكەم سپی بێت)) و ڕووداوی B بریتییە لە ((گۆی دووەم ڕەش بێت)) ئەگەر زانیت گۆی یەكەم گەڕانرایەوە ناو توورەگەكە پێش ڕاكێشانی گۆی دووەم.

ب ڕووداوی A بریتییە لە ((گۆی یەكەم سپی بێت)) و ڕووداوی B بریتییە لە ((گۆی دووەم ڕەش بێت)) ئەگەر زانیت گۆی یەكەم نەگەڕانرایەوە ناو تورەگەكە پێش ڕاكێشانی گۆی دووەم.

ئەگەری گشتگر Total Probability

چالاكی

سۆزان دوو شەشپاڵوی ژمارەكان شین و سووری هەڵدا، شێوەی خوارەوە بۆشایی نمونەیی ئەگەرەكانی ئەم تاقیكردنەوە هەرەمەكیە پیشان دەدات. ئەگەر A_k ڕووداوی (سەرجەمی دوو ژمارەی دەركەوتوو $=k$) وەڵامی ئەوانەی خوارەوە بدەوە.

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6

1. هەریەکە لەم ڕووداناوەی دێن لەسەر شێوەی کۆمەڵە بنووسەوە: A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 ، A_6 ، A_7 ، A_8 ، A_9 ، A_{10} ، A_{11} ، A_{12} ئەگەری هەر ڕووداوێك بدۆزەوە.
   پاشان دڵنیابە کە سەرجەمی ئەگەرەکانیان = 1.
2. دیاریبکە کام لەو دوو ڕووداوانەی پێشوو ڕووداوی جیان.
3. دیاریبکە کام دەرکەوتە بۆ ئەم تاقیکردنەوە هەڕەمەکیە سەر بە ڕووداوێك لە ڕوداوەکانی پێشووە.
4. لەسەرشێوەی کۆمەڵە بنووسەوە، ڕووداوی B (سەرجەمی دوو ژمارەی دەرکەوتوو لە 5 زیاتر نیە) پاشان ئەگەری هاتنەدی بدۆزەوە.
5. هەریەکە لەم ڕووداوانەی دێت لەسەرشێوەی کۆمەڵە بنووسەوە: $B\cap A_2$ ، $B\cap A_3$ ، $B\cap A_4$ ، $B\cap A_5$ ، $B\cap A_6$ ، $B\cap A_7$ ، $B\cap A_8$ ، $B\cap A_9$ ، $B\cap A_{10}$ ، $B\cap A_{11}$ ، $B\cap A_{12}$ ڕووداوی هەریەکەیان بدۆزەوە.
6. دڵنیابە لە پرسیاری پێشوو کە سەرجەم ڕووداوەکان = $P(B)$.

پشت بەستن بە چالاکی پێشوو، دەتوانین بنووسین،

$$P(B)=P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+\ldots+P(B\cap A_{12})$$

ئەم پەیوەندییەش بارێکی تایبەتە لە یاسای ئەگەری سەرجەم.

یاسای ئەگەری گشتگر

ئەگەر A_1 ، A_2 ، .... ، A_n چەند ڕووداوێك بن لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی، هەر دەرکەوتەیەك لە دەرکەوتەکانی یەکێك بێت لەو ڕووداوانە، ئەگەر B ڕووداوێك لە ڕووداوەکانی تاقیکردنەوە هەڕەمەکییەکە بێت، ئەوا $P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)$

نموونە 5

60%ی خوێندکارانی پۆلی دوانزەیەمی ئامادەیی ڕزگاری تاقیکردنەوەی لقی زانستی و ئەوانیتر تاقیکردنەوەی لقی وێژەییان ئەنجامدا، ڕێژەی دەرچوونی بەشی زانستی 70% و بەشی وێژەیی60% بوو، خوێندکارێکی پۆلی دوازدەیەم بە هەڕەمەکی هەڵبژێردرا ئەگەری ئەوەی خوێندکارەکە دەرچووبێت بدۆزەوە؟

شیکار

ئەم ڕووداوانە بەکاردەهێنین

S : ((خوێندکارەکە تاقیکردنەوەی لقی زانستی ئەنجام دابێت)).

L : ((خوێندکارەکە تاقیکردنەوەی لقی وێژەیی ئەنجام دابێت)).

A : ((خوێندکارەکە لە ئەزموونە گشتییەکان دەرچووبێت)).

وەك دیارە هەر دەرکەوتەیەك لە دەرکەوتەکانی ئەم تاقیکردنەوە هەڕەمەکییە یەکێك لە دوو ڕووداوی S یان L ئەنجام دەدات بەڵام هەردووکیان پێکەوە ئەنجام نادات کەواتە دەتوانین ئەگەری سەرجەم بەکاربهێنین.

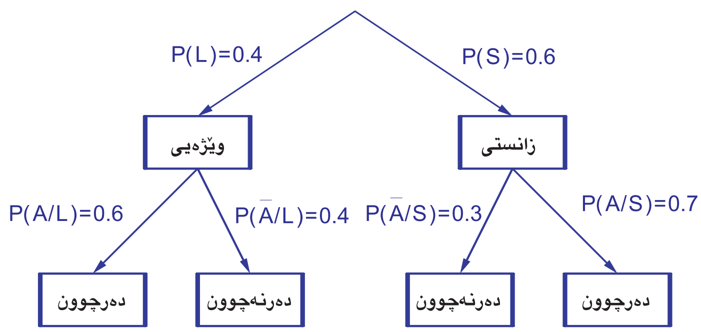
$$P(A)=P(A\cap S)+P(A\cap L)$$

بەڵام $P(A\cap S)=P(S)\times P(A/S)=0.6\times 0.7=0.42$

کەواتە $P(A\cap L)=P(L)\times P(A/L)=0.4\times 0.6=0.24$

دەتوانین پرسیارەکە بە خشتەی درەختی بنوێنین.

$$P(A)=P(A\cap S)+P(A\cap L)=0.42+0.24=0.66$$



هەوڵبدە 65% خوێندکارانی ئامادەیی هەولێر کوڕن و ئەوانی تر کچن. 80% ی کچەکان ئارەزووی خوێندنەوەیان هەیە و 55% ی کوڕەکان ئارەزووی خوێندنەوەیان هەیە، خوێندکارێکیان بە هەڕەمەکی هەڵبژارد ئەگەری ئەو خوێندکارە ئارەزووی خوێندنەوەی هەبێت چەندە؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. دوو نمونە بهێنەوە یەکێکیان بۆ دوو ڕووداوی سەربەخۆ و ئەوی تریان بۆ دوو ڕووداوی ناسەربەخۆ.
2. چۆن ئەگەرێك دەدۆزیتەوە دوو ڕووداوی سەربەخۆ بەیەکەوە پاسادان بکات؟
3. جیاوازی نێوان دوو ڕووداوی جیاو دوو ڕووداوی سەربەخۆ ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4. A و B دوو ڕووداون لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی $P(A)=\frac{3}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ ؛ $P(A/B)$ بدۆزەوە؛ ئایا دوو ڕووداوەکە سەربەخۆن؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە
5. A و B دوو ڕووداوی سەربەخۆبن لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.3$ ئەمانە بدۆزەوە.

أ) $P(A\cap B)$ ب) $P(A\cup B)$ ج) $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ د) $P(\bar{A}\cup\bar{B})$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

6 A و B دوو ڕووداوی سەربەخۆن $P(A)=\frac{3}{8}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$
$P(A/B)$ و $P(B/A)$ بدۆزەوە.

7 نەوزاد پارچە پارەیەکی کانزایی سێ جار هەڵدا یەکبەدوای یەك. ئەگەری تاقیکردنەوەیی $P(A/B)$ بدۆزەوە کاتێك A: ((خەت زیاتر دەرکەوتبێت لە شێر)) و B: ((خەت لەهەڵدانی یەکەم دەرکەوتبێت)).

8 A و B دوو ڕووداون لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی.
$P(A)=0.5$، $P(B)=0.3$، $P(A\cap B)=0.15$.
$P(A/B)$ بدۆزەوە. ئایا دوو ڕووداوەکە سەربەخۆن؟ ڕوونیبکەوە.

9 **پیشەسازی** کۆمپانیای فورات بۆ بەرهەمهێنانی گڵۆپی کارەبا 3 کارگە لە خۆوەدەگرێت (هەیەتی). بەرهەمی کارگەی یەکەم 40% هەمووی بەرهەمەکانی کۆمپانیاکەیە، لەکاتێکدا هەریەکە لەدوو کارگەکەی تر 30% ی گشت بەرهەمەکان بەرهەمدێنێت.
لەلایەکی ترەوە ڕێژەی ئەو گڵۆپانەی بێسوودن دەکاتە 20% لە بەرهەمهێنانی کارگەی یەکەم وە 15% لە بەرهەمهێنانی کارگەی دووەم وە 10% لەبەرهەمهێنانی کارگەی سێیەم (ئەگەر بزانیت گڵۆپەکە بێسودە).
گڵۆپێك بەشێوەی هەڕەمەکی هەڵبژێردرا ئەگەری گڵوپەکە بێسوودبێت چەندە؟ وە ئەگەری ئەوەی لەبەرهەمی کارگەی سێیەم بێت بێسوودبێت چەندە؟

10 **وەرزش** تیپی هەولێر بۆ تۆپی پێ 70%ی یارییەکانی لەناو عیراق و ئەوانیتر لەدەرەوەی وڵات ئەنجامدەدات، ئەگەری بردنەوەی لەناو وڵات بریتییەلە 0.6 و لەدەرەوە 0.5.
حەفتەی داهاتوو تیپەکە یارییەك ئەنجامدەدات ئەگەری بردنەوەی چەندە؟ ئەگەری ئەنجامدانی یارییەکە لەناو وڵاتدا چەندە؟ کە براوەبێت.

11 150 مامۆستا سەرپەرشتی خولەکانی ڕاهێنان لە زانستەکان و بیرکاری دەکەن و لەماوەی خولەکە سێ جۆر چالاکی (شیکاری پرسیارەکان و وانەوتنەوە و نووسینی ڕاپۆرت) ئەنجامدەدەن.

	شیکاری پرسیارەکان	وانە ووتنەوە	نووسینی ڕاپۆرت	سەرجەم
زانست	45	18	27	90
بیرکاری	33	9	18	60
سەرجەم	78	27	45	150

أ ئایا دوو ڕووداوی «بەدواداچوونی خولی بیرکاری دەکات» و «شیکاری پرسیارەکان دەکات» دوو ڕووداوی سەربەخۆن.

ب ئایا دوو ڕووداوی «بە دواداچوونی خولی زانستەکان دەکات» و «نووسینی ڕاپۆرت دەکات» دوو ڕووداوی سەربەخۆن.

ڕوانین بۆ دواوە

دانا دوو بەردەزاری هەڵدا، ئەگەری ئەمانە بدۆزەوە.

12 سەرجەمی دوو ژمارەکەی سەر دوو بەردە زارەکە 12 بێت.

13 یەك لە دوو ژمارە دەرکەوتووەکە بەلایەنی کەمەوە تاك بێت؟

14 یەك لە دوو ژمارە دەرکەوتووەکە بەلایەنی کەمەوە لە 3 کەمتربێت؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

15 لەو خشتەی خوارەوە نمرەکانی ژمارەیەك پاڵێوراو بۆ وەرگیران لە کۆلێژی پزیشکی نیشان دەدات، خشتەکە تەواوبکە بە دۆزینەوەی تێکڕای نمرەکانی هەریەکێکیان ئەگەر زانیت کە بەرزکردنەوەی نمرەکان لە وەرگیران بەم جۆرەیە:

بیرکاری 3 ؛ زانستەکان 4 ؛ زمانی ئینگلیزی 2 ؛ زمانی کوردی 1

خوێندکار	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	زمانی کوردی	تێکڕا
لاری	45	65	55	70	
لۆرا	75	70	50	60	
لیندا	80	65	55	40	

وانەی 3

نمونە هێڵییەکان Linear Models



بۆچی؟

هەندێکجار وا دیارە کە کۆمەڵە پێدراوێك بەهای نەخشەی هێڵی بەنزیکەیی دیاریدەکات. ئەگەر لە توانات دابێت ئەو نەخشەیە دیارییکەیت ئەوا دەتوانی هەموو ئەو شتانەی پێشبینی دەکرێن سەر بە بابەتەکت بینووسیەوە.

ئامانجەکان

- نمونەی هێڵی بۆ نواندنی کۆمەڵێك دەدۆزێتەوە.
- نمونە هێڵییەکان بۆ ئەنجامدانی پێشبینییەکان بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان Vocabulary

گەڕانەوە (تراجع) Regression

پەیوەستبوون Correlation

هاوکۆڵکەی پەیوەست Correlation coefficient

ڕاستەهێڵی باشترین نواندن Line of best fit

سیسرکی سنۆبەر دەنگێك دەردەکات بەهۆی لێکخشاندنی دوو باڵەکەی، هێزی ئەو دەنگە زیاددەکات بە زیادبوونی لێکخشاندنەکە. و زانایان سەرنجیاندا کە خێرایی ئەو جوڵانە (لێکخشاندنە) زیاددەکات بە زیادبوونی پلەی گەرمی، بەمەش دەتوانرێت پلەی گەرمی دیاریبکرێت بە بیستنی دەنگی ئەو مێرولانە. لەخشتەی خوارەوە پێدراوی دەنگەکانی ئەو مێرولانە دەردەکەوێت (بە ژمارەی لەرەلەرە لە چرکەیەکدا) کە لە 15 پلەی گەرمی جیاواز تۆمارکراوە.

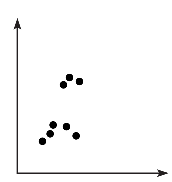
ژمارەی لەرەلەر	20	16	20	18	17	16	15	17	15	16	15	17	16	17	14
پلەی گەرمی	89	72	93	84	81	75	70	82	69	83	80	83	81	84	76

ئایا دەتوانیت پلەی گەرمی بخەمڵێنیت ئەگەر هێزی دەنگی مێرولەکانت زانی (بە ژمارەی لەرەلەرەکانی لە چرکەیەکدا).

گەڕانەوە Regression

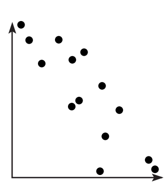
مرۆڤ تووشی زۆر پرسیار دەبێتەوە کە دوو گۆڕاوی ئاماری تێدایە، یەکێکیان کار لە ئەوی دیکەیان دەکات وەك لە پرسیاری پێشوو ئامارناسان **گەڕانەوە Regression** بەکاردەهێنن بۆ لێکۆڵینەوەی ئەم جۆرە پەیوەندییە بەپێی چەند پێدراوێکی دیاریکراو.

ئامارناسان **خاڵە ڕوونکردنەوەکان Scatter Plot** بەکاردەهێنن بۆ تێگەیشتن لە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستە و هێزەکەی. وباسی **پەیوەستبوون Correlation** دەکەن بۆ دەربڕین لە هێزی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەکەی.



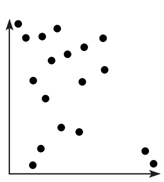
پەیوەستی موجەب

لاری موجەب



پەیوەستی سالب

لاری سالب



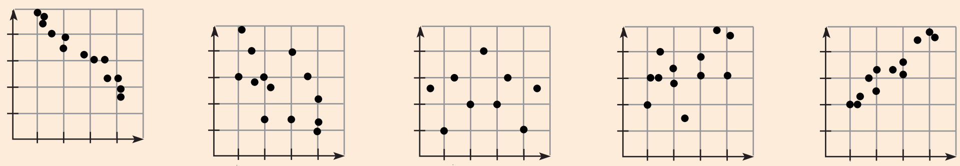
پەیوەستی نییە

ئامارناسان مەودای نواندنی نمونەیەکی هێڵی کۆمەڵە پێدراوێك بەهۆی ژمارەی r کە پێی دەڵێن **هاوکۆڵکەی پەیوەستی Correlation coefficient** دەپێون.

فێربە و بەرچ بدە

سیفەتەکانی هاوکۆلکەی پەیوەست

هاوکۆلکەی پەیوەست Correlation Coefficient ژمارەیەکە پاسادانی $-1 \le r \le 1$ دەکات.
ئەگەر $r = 1$ ، ئەوا ئەو خاڵە ڕوونکردنەوانەی کۆمەڵێك پێدراو دەنوێنن، ڕاستەهێڵێکی لاری موجەب پێکدەهێنن.
ئەگەر $r = 0$، ئەوا پەیوەستی لەنێوان دوو گۆڕاوەکە نییە.
ئەگەر $r = -1$، ئەوا ئەو خاڵە ڕوونکردنەوانەی پێدراوەکان دەنوێنن ڕاستەهێڵێکی لاری سالب پێکدەهێنن.



$r = -0.95$ | $r = -0.6$ | $r = 0$ | $r = 0.6$ | $r = 0.95$

ئامارناسان جۆرە جیاوازەکانی نەخشەکان بەکاردەهێنن بۆ باسکردنی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو، بەڵام گرنگییەکی زۆر بە بەکارهێنانی نەخشە هێڵییەکان دەدەن بەتایبەتی ئەگەر پەیوەندییەکی بەهێز لەنێوان خاڵە ڕوونکردنەوەکان بەدیارکەوت و وا دیارکەوتن کە نزیکن لە پێکهێنانی ڕاستەهێڵێك. لەبەرئەوە ئەو وانەیە باسی ئەمەی دێت دەکات:

گەڕانەوەی هێڵی Linear Regression ، ئەگەر دوو گۆڕاو بە پەیوەندییەکی هێڵی بەهێز پێکەوە بەستران ئەوا تۆ ڕاستەهێڵێکی **باشترین نواندن Line of Bestfit** بەکاردەهێنێت بۆ دەربڕین لەو پەیوەندییە و ئەنجامدانی پێشبینییەکان.

(1) **ڕێگای کەمترین دووجایەکان Least Squares**، ئەم ڕێگایە زۆر وردە بەڵام پێویستی بە ژمێرياريیەکی یەکجار زۆر هەیە یان دەبێت بژمێر بەکاربهێنیت.

(2) **ڕێگای ڕوونکردنەوەیی Graphic Method**، لەم ڕێگایە خاڵە ڕوونکردنەوەکان دیاریدەکرێت کە پێدراوەکانی خشتەی پێدراوەکان دەنوێنن و ڕاستەهێڵێك دەکێشرێت کە نزیکبێت لە هەموو خاڵەکان.

(3) **ڕێگای ڕاستەهێڵی مایەر Mayer Line**، لەم ڕێگایە پێدراوەکان بۆ دوو بەشی یەکسان بەنزیکەیی بەشدەکرێت لەباری درێژی و دووخاڵ دیاریدەکرێت، لەسەر ڕاستەهێڵەکە کە مەرج نیە خاڵە دراوەکان بن، پاشان ئەو ڕاستەهێڵەی کە بەو دوو خاڵە دادەڕوات، بە ڕاستەهێڵی باشترین نواندنی دادەنێن.

(4) **ڕێگای ناوەڕاستە Median Method**، لەم ڕێگایە پێدراوەکان دەکرێتە سێ بەش، و سێ خاڵ دیاریدەکرێت کە هەریەکەیان بەشێك لەو سێ بەشە دەنوێنن، پشت بەو ڕاستەهێڵە دەبەسترێت کە بەخاڵی دووەم دادەڕوات و تەریبە بەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵە دادەڕوات کە بەشی یەکەم و سێیەم دەنوێنن. لەو وانەیەدا ڕێگای ڕوونکردنەوە و ڕاستەهێڵی مایەرو ڕێگای ناوەڕاستە وەردەگرین بۆ ئەوەی لەهەژمارکردنی ئاڵۆز دووربکەوینەوە و نابێت لەبیربکەین کە ئەنجامەکانی ئەم ڕێگایانە ئەنجامی نزیکەین.

ڕێگای ڕوونکردنەوەیی Graphic Design

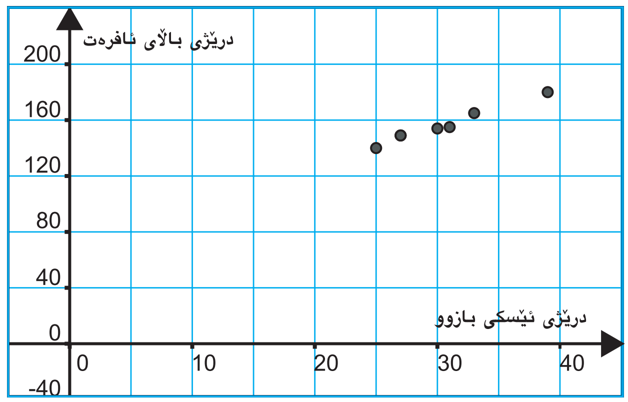
نموونە 1

جێبەجێکردن لەسەر زانستی ڕەگەزە **مرۆییەکان** زانایانی ڕەگەزە مرۆییەکان درێژی ئێسکی بازوو کەشان بە ئەنیشکی ئافرەت دەبەستێتەوە بۆ خەملاندنی درێژی ئافرەتەکە بەکاردەهێنن، لەخشتەی دێت درێژی بالای ژمارەیەك ئافرەت (بە سانتیمەتر) و درێژی ئێسکی بازوویان بە (سانتیمەتر) دەردەکەوێت، خاڵە ڕوونکردنەوەکان دیاریبکە کە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنن، و درێژی ئێسکی بازوو وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربهێنە، پاشان هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بۆ ئەو پێدراوانە بدۆزەوە، درێژی بالای ئافرەتێك چەندە کە ئیسکی بازووەکەی 37cm بێت؟

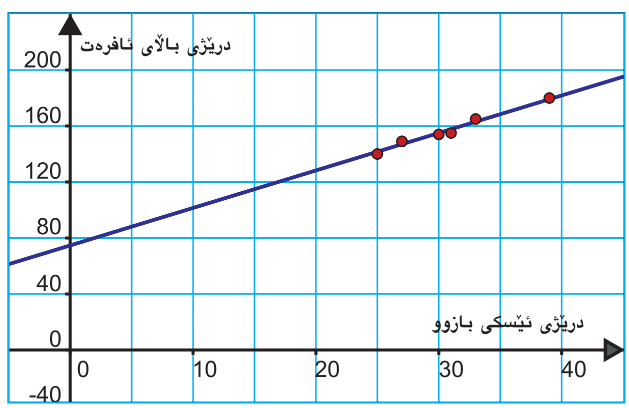
درێژی ئێسکی بازووی ژمارەیەك ئافرەت								
درێژی ئێسکی بازوو	35	27	30	33	25	39	27	31
درێژی بالای ئافرەت	167	149	154	165	140	180	149	155

شیکار

هەنگاوی 1: دیاریکردنی خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان کە پێدراوەکان دەنوێنن



هەنگاوی 2: کێشانی ڕاستەهێڵەکە.



هەنگاوی 3: دیاریکردنی دوو خاڵ لەسەر ڕاستەهێڵەکە

$(14, 110)$ و $(32, 160)$.

هەنگاوی 4: دۆزینەوەی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات. هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $(14, 110)$ و $(32, 160)$دا دەڕوات بدۆزەوە.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 110 = \frac{160 - 110}{32 - 14}(x - 14)$$

$$y = 2.78x + 71.11$$

بۆ ئەوەی بەهای پێشبینکراوی درێژی ئافرەتێك هەژماربکەیت درێژی ئێسکی بازووەکەی 37cm بێت 37 لە جیاتی x لە هاوکێشەی باشترین نواندن دابنێ.

$y = 2.78x + 71.11$

$y = 2.78 \times 37 + 7.11$

$y = 173.97$

174 cm

هەوڵبدە **پاسكيل سواری** لە خشتەی خوارەوە پێدراوەكانی ژمارەی ئەو كيلۆمەترانەی كە ژمارەيەك لە ڕكابەرەكان بەپێی كات (بە كاتژمێر) لە پێشبڕكێيەكی پاسكيل سوارييدا دەيبڕن دەردەكەوێت هاوكێشەی ڕاستەهێڵی باشترين نواندنی ئەم پێدراوانە بدۆزەوە. پێشبڕكێكەرەكە لەماوەی 11 كاتژمێر چەند دەبڕێت.

پێشبڕكێی پايسكل سواری														
كات (بەكاتژمێر)	1	6	2	5	5	9	4	10	3	8	7	7	2	10
ماوە (بەكيلۆمەتر)	9	45	20	71	57	98	56	104	36	75	60	71	31	97

ڕاستەهێڵی ماير Mayer St.line

نمـــونـــە 2

جێبەجێكردن لەسەر باری كەش و هەوا

شاری ئەكرۆن لە ئەمريكا و شاری ولنگتۆن لە نيوزلندا هەمان دووريان هەيە لە هێڵی كەمەرەيی (خط الاستواء) يەكەميان لەنيوەی سەرەوەی گۆی زەوی و ئەويتريان لەنيوەی خوارەوەی گۆی زەوی. خشتەی خوارەوە بەرزترين ناوەندە ژمێرەكانی پلەی گەرما بە فەهرەنهايتی هەردوو شار لەماوەی 12 مانگ دەردەكەوێت خاڵە ڕوونكردنەوەكان دياريبكە كە پێدراوەكانی خشتەكە دەنوێنن، يەكتربەستنی نێوان دوو گۆڕاوەكە بدۆزەوە كاتێك ئەوە ناوەندە ژمێرييە 65 بێت لە ئەكرۆن؟

ناوەندە ژمێرەييەكانی بەرزترين پلەی گەرمی (فەهرەنهايت)												
مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئەكرۆن	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
ولنگتۆن	67	67	65	62	56	53	51	52	55	57	60	64

شيكار

هەنگاوی 1: دووبارە پێدراوەكان سەر بەرەو ژوور بەپێی گۆڕاوی ئازاد ڕيزبكە.

ئەكرۆن	33	37	38	48	49	59	61	70	73	78	80	82
ولنگتۆن	67	67	64	65	60	62	57	56	55	53	52	51

هەنگاوی 2: ئەم خشتە بۆ دوو خشتەی يەكسان لە ژمارەی ستونەكان بەشبكە.

ئەكرۆن	33	37	38	48	49	59		61	70	73	78	80	82
ولنگتۆن	67	67	64	65	60	62		57	56	55	53	52	51

هەنگاوی 3: هەريەك لە x_1، ناوەندە ژمێرەيی گۆڕاوی ئازاد و y_1 ناوەندە گۆڕاوەكانی پەيوەست ، لەبەشی يەكەمی خشتەكە بدۆزەوە. پاشان هەريەك لە x_2 ناوەندە بەهايەكانی گۆڕاوی ئازاد و y_2 ناوەندە بەهايەكانی گۆڕاوی پەيوەست، لەبەشی دووەمی خشتەكە بدۆزەوە.

$$x_1 = \frac{33+37+38+48+49+59}{6} = 44 \quad \text{و} \quad y_1 = \frac{67+67+64+65+60+62}{6} = 64.16$$

$$x_2 = \frac{61+70+73+78+80+82}{6} = 74 \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{57+56+55+53+52+51}{6} = 54$$

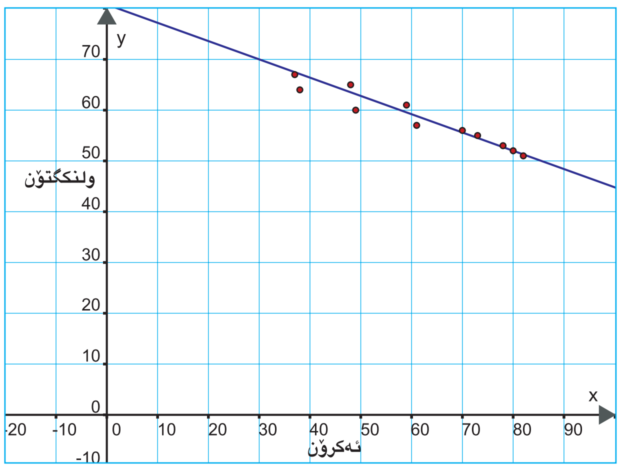
هەنگاوی 4: هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دا دەڕوات بدۆزەوە.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 64.16 = \frac{54 - 64.16}{74 - 44}(x - 44)$$

$$y = -0.34x + 79.06$$

هەنگاوی 5: خاڵە ڕوونكردنەوەكان و ڕاستەهێڵی باشترین نواندن دیاریبكە.



ئەگەر ناوەندە ژمێرەیی بەرزترین پلەی گەرمی لە ئەكرۆن 65 پلە بێت، پێشبینی دەكرێت ئەم ناوەندە ژمێرەییە لە ولنگتۆن.

$$y = -0.34x + 79.06$$

$$y = -0.34 \times 65 + 79.06$$

$$y = 56.96$$

واتا 57 پلەیە بەنزیكەیی.

هەوڵبدە

تۆپی سەبەتە خاڵە ڕوونكردنەوەكان دیاریبكە بۆ نواندنی پێدراوەكانی خشتەكە، پەیوەستی نێوان دوو گۆڕاوەكە بدۆزەوە، ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بكێشە و هاوكێشەكەی بدۆزەوە. ژمارەی خاڵەكان لەماوەی 25 خولەك بە چەند پێشبینی دەكەیت؟

ژمارەی خاڵەكان لەماوەیەك										
30	15	27	19	23	39	20	8	35	28	كات
19	4	15	9	10	31	12	2	13	16	خاڵەكان

ڕێگای ناوەڕاستە

نموونە 3

جێبەجێكردن لەسەر خواردن

لەخشتەی دێت پێدراوەكانی هێندەی ئەو چەورییە و بەهای گەرمییەی جۆرە بابۆڵەیەكان تێیدایە دەردەكەوێت. ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە. بەهای گەرمی بابۆڵەیەك 17 گرام چەوری تێدابێت بە چەند پێشبینی دەكەیت.

پێدراوە خۆراکییەکانی هەند لە جۆرە بابۆڵەکان								
هێندی چەورییەکان (بە گرام)	5	9	12	15	12	10	21	14
بەهای گەرمی (گەرمۆکە)	360	375	460	420	530	455	580	390

شیکار

هەنگاوی 1: دووبارە خشتەکە بنووسەوە و پێدراوەکانی بەرەوژوور ڕیزبکە بەپێی بەهایەکانی گۆڕاوی ئازاد، کە هێندی چەورییەکانە لەم پرسیارەدا.

پێدراوە خۆراکییەکانی هەند لە جۆرە بابۆڵەکان								
هێندی چەوریەکان (بە گرام)	5	9	10	12	12	14	15	21
بەهای گەرمی (گەرمۆکە)	360	375	455	460	530	390	420	580

هەنگاوی 2: ئەو خشتەیە دابەشبکە بۆ سێ بەش کە ژمارەی ستونەکانی بەشی یەکەم و سێیەم یەکسان بن و ژمارەی ستوونەکانی دووەم نزیك بێت لە ژمارەی هاوبەشی دوو ستونی یەکەم و سێیەم.

پێدراوە خۆراکییەکانی هەندێك لە جۆرە بابۆڵەکان										
هێندی چەوریەکان (بە گرام)	5	9	10		12	12		14	15	21
بەهای گەرمی (گەرمۆکە)	360	375	455		460	530		390	420	580

هەنگاوی 3: هەریەکە لە x_1 ناوەڕاستەی گۆڕاوی ئازاد، و y_1 ناوەڕاستەی گۆڕاوی پەیوەست لەبەشی یەکەم بدۆزەوە، پاشان هەریەکە لە x_3 ناوەڕاستەی گۆڕاوی ئازاد و y_3 ناوەڕاستەی گۆڕاوی پەیوەست لە بەشی سێیەم بدۆزەوە. ناوەندە بەهای x ی بەشی یەکەم دەکاتە $x_1 = 9$ و ناوەندە بەهای y دەکاتە $y_1 = 375$ لەو کاتەدا ناوەڕاستەی x ی بەشی سێیەم $x_3 = 15$ و ناوەڕاستەی y بریتییە لە $y_3 = 420$.

هەنگاوی 4: لاری ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە بە دوو خاڵی (x_1, y_1) و (x_3, y_3) دا دەڕوات.
لاری ڕاستەهێڵی d کە بە دوو خاڵی (x_1, y_1) و (x_3, y_3) دا دەڕوات دەکاتە

$$m = \frac{420 - 375}{15 - 9} = 7.5$$

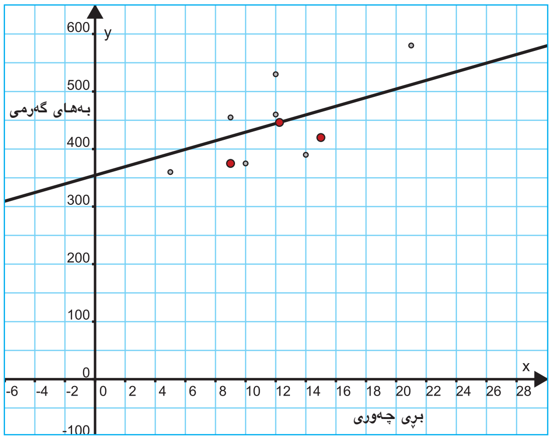
هەنگاوی 5: x_2 ناوەندی ژمێرەیی گۆڕاوی ئازادی هەموویان بدۆزەوە.
y_2 ناوەندی ژمێرەیی گۆڕاوی پەیوەستی هەموویان بدۆزەوە.

$$x_2 = \frac{5+9+12+15+12+10+21+14}{8} = 12.25$$

$$y_2 = \frac{360+455+460+420+530+375+580+390}{8} = 446.25$$

هەنگاوی 6: هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی (x_2, y_2) دا دەڕوات و لارییەکەی m ە بدۆزەوە.
$y - 446.25 = 7.5(x - 12.25)$ یان $y = 7.5x + 354.375$
ئەو هاوکێشەی دەستتکەوتووە بەنزیکەیی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندنی کۆمەڵە بەهایەکانە.

هەنگاوی 7: خاڵە ڕوونکردنەوەکان دیاربکە کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنن، خاڵەکانی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) دیاربکە، ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە.



کەواتە بەهای گەرمی بابۆلەیەك 17 گرام چەوری تێدابێت بریتییە لە

$$y = 7.5x + 354.375$$
$$y = 7.5 \times 17 + 354.375$$
$$y = 481.875$$

واتا 482 گەرمۆکەی گەرمی بەنزیکەیی.

هەوڵبدە لەم خشتە پێدراوەکانی چەند ئۆتۆمبێلێك بە هەڕەمەکی هەڵبژێردراون و ئەو ماوەی کە ئۆتۆمبێلەکە دەیبڕێت بە بەکاربردنی یەك لیتر سووتەمەنی بەپێی هێزەکەی (بەهێزی ئەسپ) دەنوێنێت، ئۆتۆمبێلێك هێزەکەی 150 ئەسپ بێت بەیەك لیتر چەند ماوە دەبڕێت.

هێزی ئۆتۆمبێلەکان و دووری بڕاو لەیەك لیتر										
هێز	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
دووری لە هەر لیترێك (km/l)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.95

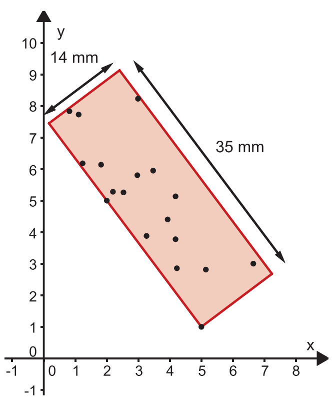
خاڵە ڕوونکردنەوەکان دیاربکە کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنن بە بەکارهێنانی هێزی ئۆتۆمبێلەکە وەك گۆڕاوی ئازاد، پاشان هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، ئەو دوورییەی ئۆتۆمبێلێك هێزەکەی 210 ئەسپ بێت دەیبڕێت بدۆزەوە؟

هاوکۆڵکەی پەیوەستی

هەژمارکردنی هاوکۆڵکەی پەیوەستی r پێویستی بە هەژمێرکردنی ئاڵۆز یان بەکارهێنانی بژمێر هەیە، بەڵام دەتوانرێت بەهای نزیکەیی ئەو هاوکۆڵکەیە بە ڕوونکردنەوەیی بدۆزرێتەوە.

بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی هاوکۆڵکەی پەیوەستی بۆ چەند خاڵێکی ڕوونکردنەوەیی، بچوکترین لاکێشە بکێشە کە هەموو خاڵەکان لەخۆبگرێت و پێوانەی لایە درێژەکەی L و لایە کورتەکەی ℓ بدۆزەوە. بەهای نزیکەیی هاوکۆڵکەی پەیوەستی بریتییە لە $r \approx \pm\left(1-\frac{\ell}{L}\right)$ و نیشانەکەی بریتییە لە نیشانەی پەیوەستی، واتا نیشانەی − ئەگەر هاوکۆڵکەکە سالب بێت و نیشانەی + ئەگەر هاوکۆڵکەکە موجەب بێت.

نموونە 4 **بەهایەکی نزیککراو بۆ هاوکۆڵکەی پەیوەستی بۆ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکانی بەرامبەر بدۆزەوە.**

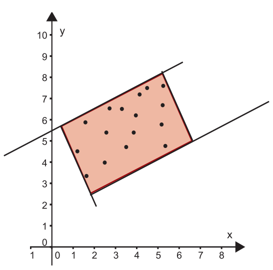


شیکار

$\ell = 14$ ، $L = 35$ وە پەیوەستی سالبە، کەواتە

$$r \approx -\left(1-\frac{\ell}{L}\right) = -\left(1-\frac{14}{35}\right) = -0.6$$

هەوڵبدە بەهایەکی نزیککراو بۆ هاوکۆڵکەی پەیوەستی بۆ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکانی بەرامبەر بدۆزەوە.



ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بۆ کۆمەڵە پێدراوێك بریتییە لە $y = 3.2x - 12.5$ ئایا پەیوەستی نێوان گۆڕاوە ئامارییەکان موجەبە یان سالبە؟
2. هاوکۆڵکەی پەیوەستی دوو گۆڕاوی ئاماری دەکاتە $r_1 = 0.65$ و هاوکۆڵکەی پەیوەستی دوو گۆڕاوی تر دەکاتە $r_2 = -0.75$ ، کام هاوکۆڵکە پەیوەستی بەهێزتر دەردەبڕێت.
3. ئایا دەتوانیت بەهایەکی نزیکەیی هاوکۆڵکەی پەیوەستی بهێنیتەوە، ئەگەر لە خاڵە ڕوونکردنەوەکان هیچ پەیوەستییەك لەنێوان دوو گۆڕاوەکە دەرنەکەوێت، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

4 **ئۆتۆمبێلەكان** خاڵە ڕوونكردنەوەكان بكێشە بۆ نواندنی پێدراوەكانی خشتەكە، بە بەكارهێنانی ژمارەی گاڵۆنەكان وەك گۆڕاوی ئازاد، ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بكێشە و هاوكێشەكەی بدۆزەوە، ئایا پەیوەستییەكە پەیوەستییەكی بەهێز دەردەكەوێت.

دووری براو (km)							
ژمارەی گاڵۆنەكان	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
دووری براو	338	296	332	324	368	263	305

5 **ئابووری** لەخشتەی خوارەوە پێدراوەكانی پلەی گەرمی لەماوەی حەفت مانگ و نرخی ساردكەرەوە (بە هەزاران دینار) لە یەكێك لە ماڵەكان دەردەكەوێت.

پلەكانی گەرما							
ناوەندە پلەی گەرما	38	42	44	36	42	49	38
برە پارەی	93	79	75	83	74	67	86

أ خاڵە ڕوونكردنەوەكان پێدراوەكانی خشتەكە دەنوێنن بكێشە بە بەكارهێنانی ناوەندە ژمێرەیی و پلەی گەرمی وەك گۆڕاوی ئازاد.

ب هاوكێشەی باشترین نواندن بۆ ڕاستەهێڵ بە بەكارهێنانی وێنەی ڕوونكردنەوەیی بدۆزەوە و ڕوونكردنەوەكەی بكێشە.

ج ئایا پەیوەستی نێوان دوو گۆڕاوەكە سالبە یان موجەبە؟ ئایا پەیوەستی نێوانیان بەهێزە یان لاوازە؟

د برە پارەی ساردكەرەوە بۆ مانگێك تێكڕای پلەی گەرمی 40 پلەبێت بخەمڵێنە، وردی ئەم خەملاندنە دیاریبكە؟

6 **خوێندنگاكان** لەخشتەی خوارەوە پێدراوەكانی ژمارەیەك مامۆستا و ژمارەیەك خوێندكار لە سامپڵێكی هەڕەمەكی دەردەكەوێت لە چەند خوێندنگایەك.

ژمارەی خوێندكار و مامۆستایەكان								
ژمارەی مامۆستایەكان	92	52	114	49	110	62	76	84
ژمارەی خوێندكارەكان	1050	653	753	381	1312	813	796	910

أ خاڵە ڕوونكردنەوەكان بكێشە، پێدراوەكان بنوێنێت بە بەكارهێنانی ژمارەی مامۆستایەكان وەك گۆڕاوی ئازاد.

ب بە بەكارهێنانی جەبر هاوكێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە و ڕوونكردنەوەكەی بكێشە.

ج ژمارەی مامۆستایەكان لە خوێندگایەك 600 مامۆستا بێت، ژمارە خوێندكارەكان بە چەند دەخەمڵێنرێت بخەمڵێنە ئەم خەملاندنە چەند وردە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

7 **نرخاندنی پلیتەکان** بەرێوەبەری یەکێك لە تیمە مۆسیقییەکان نرخی پلیتەکانی هاتنە ژوورەوە بۆ ئاهەنگی تیمەکە و ژمارەی ئامادەبووان بەپێی ئەم خشتەیە تۆمارکرد.

ئامادەبووان بەپێی نرخی کارتەکانی چوونە ژوورەوە (بە هەزاران دینار)									
نرخ	6	5	8.5	8	10	5.5	7	7.5	8
ئامادەبووان	213	256	155	194	160	267	258	210	235

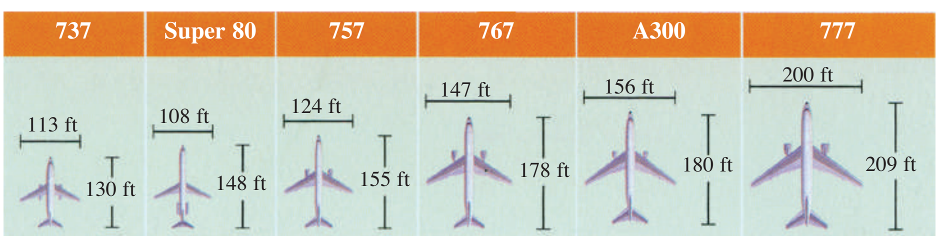
أ خاڵە ڕوونکردنەوەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بە بەکارهێنانی نرخ وەك گۆڕاوی ئازاد بکێشە.

ب ئایا پەیوەستی نێوان دوو گۆڕاوەکە سالبە یان موجەبە؟ ئایا پەیوەستی نێوانیان بەهێزە یان لاوازە؟

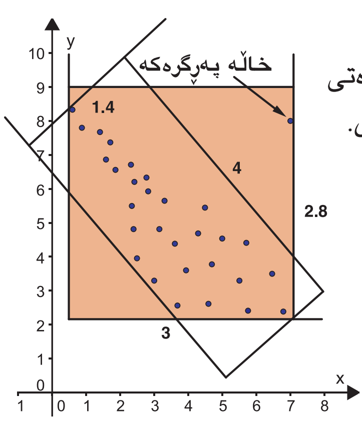
ج هاوکێشەی نواندنی باشترین ڕاستەهێڵ بدۆزەوە بە بەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی، ڕوونکردنەوەکە بکێشە، پاشان بەهای کۆڵکەی پەیوەست بدۆزەوە ئەگەر بژمێری ڕوونکردنەوەیی هەبوو.

د ژمارەی ئامادەبووان لە ئاهەنگێك بخەملێنە کە نرخی پلیتی چوونە ژوورەوە 9 هەزار دینار بێت. ئەم خەملاندنە چەند وردە؟

8 **فڕۆکەوانی** خشتەی خوارەوە درێژی چەند فڕۆکەیەك و پانی دوو باڵەکەی دیاریدەکات خاڵە ڕوونکردنەوەکان بکێشە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بە بەکارهێنانی درێژی فڕۆکە وەك گۆڕاوی ئازاد نواندنی باشترین ڕاستەهێڵی بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.



9 وێنەی بەرامبەر خاڵە ڕوونکردنەوەکانی ئەو پەیوەندییە دیاردەخات لە نێوان تەمەنی قوتابییەك لە قۆناغی بنەڕەتی و ئەو کاتەی دەیخایەنێت بۆ بەستنی قەیتانی پێلاوەکەی.



أ بەنزیکەیی بەهای هاوکۆڵکەی پەیوەست بدۆزەوە.

ب ئەم خاڵانە بەهای پەرگرەکە دەگرێتەوە بەنزیکەیی بەهای کۆڵکەی پەیوەست بدۆزەوە و پاش لابردنی خاڵە پەرگرەکە (نقطة متطرفة).

ج باسی چۆنیەتی کاریگەری خاڵە پەرگرەکە لەسەر هێزی پەیوەست بکە.

10 لەخشتەی خوارەوە پێدراوەکانی ئەندامانی تیپێکی تۆپی بالە دەردەکەوێت کە درێژی هەریەکەیان و درێژی پێی ڕاستیان بە سانتیمەتری تێدایە.

درێژی و درێژی پێی ڕاستیان												
درێژی پێی	27.5	26.5	25.0	31.0	28.5	28.0	29.5	28.0	27.5	26	24.5	29.0
درێژی بالا	178	179	172	186	181	180	185	183	179	172	170	181

أ خالە ڕوونکردنەوەکان دیاریبکە کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنن.

ب ڕێگای مایەر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی باشترین نواندن بەنزیکەیی.

ج بەهای نزیکەیی هاوکۆلکەی پەیوەست بدۆزەوە.

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

هەر سیستەمێکی هێڵی شیکاربکە.

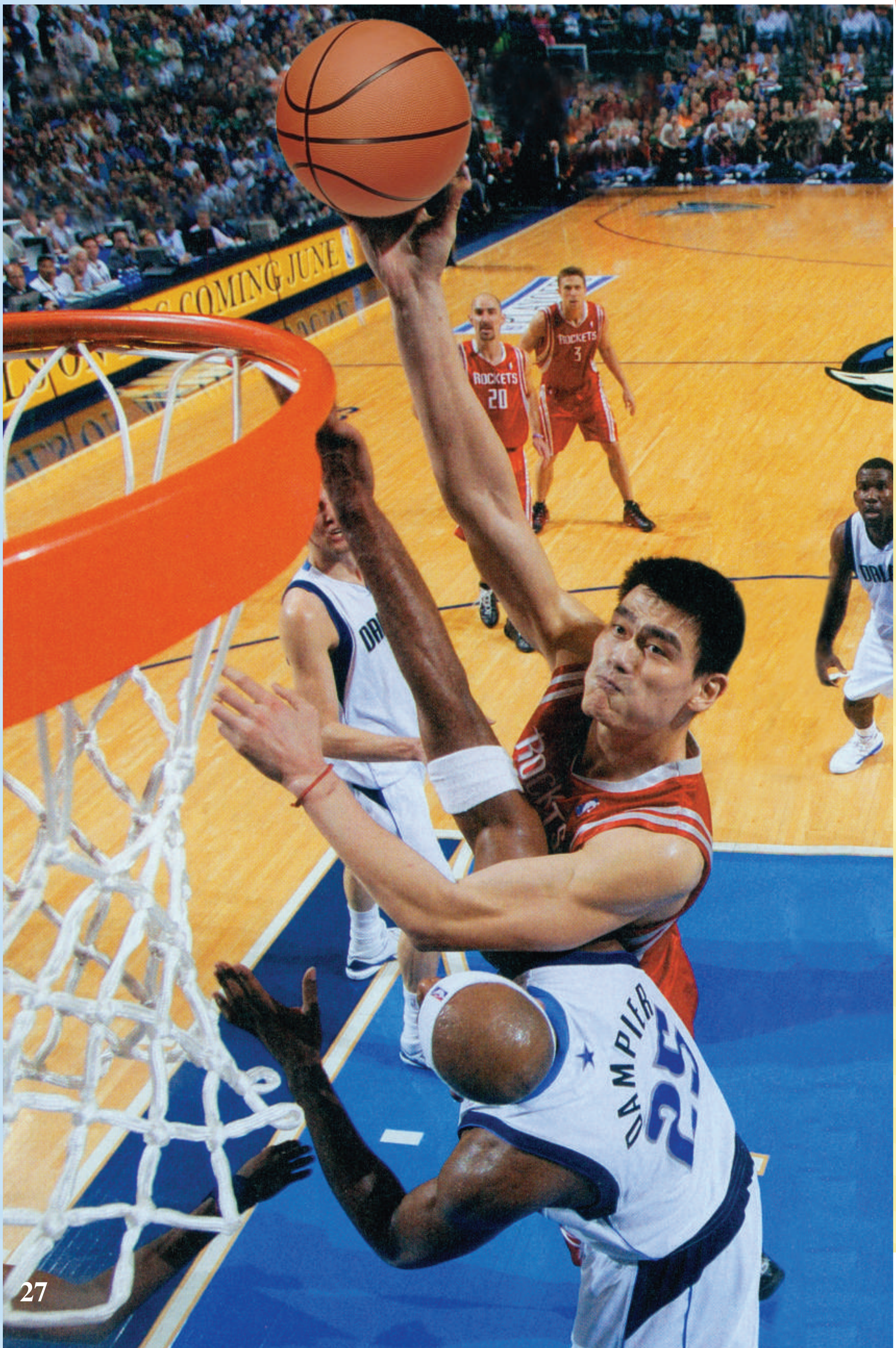
11 $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2x+5x=12 \end{cases}$

12 $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x+5x=-2 \end{cases}$

بەشی 2

جەبر

Algebra



وانەكان

وانەی
1

شیکارکردنی سیستەمە هێڵییەکان بە سێ نەزانراو
Solving Linear systems in 3 unknowns



بۆچی؟

دەتوانیت سیستەمی 3 هاوکێشەی هێڵی بە سێ نەزانراو بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی زۆر لە پرسیارەکانی ژیانی رۆژانە، وەك دۆزینەوەی سیستەمی نمرە بەرزکردنەوەی لە وەرگرتن لە کۆلێژەکان (نموونەی 2)

ئامانجەکان

- شیکارەکانی سیستەمی هێڵی بە سێ نەزانراو لە رووەختی پۆوتانەکان دەنوێنێت.
- سیستەمی هێڵی بە سێ نەزانراو جەبریانە شیکاردەکات.

لە پۆلەکانی پێشوو فێربوویت سیستەمێکی هێڵی لە دوو هاوکێشە بە دوو نەزانراو یان سیستەمی هێڵی 2×2 شیکاربکەیت، بەزۆری جار بە سیستەمی 3 هاوکێشەی هێڵی بە سێ نەزانراو دەوترێت سیستەمی 3×3 ، بۆ دۆزینەوەی شیکارێکی تاکانە بۆ سیستەمێکی هاوکێشە هێڵییەکان، بە گشتی پێویستە ژمارەی هاوکێشەکان یەکسان بن بە ژمارەی نەزانراوەکان.

بۆ ئەوەی سیستەمێکی 3×3 شیکاربکەیت پێویستە بیگۆڕیت بۆ سیستەمی 2×2 ، پاشان ڕێگایەکانی شیکارکردنی سیستەمی 2×2 بەکاربهێنیت کە لە پۆلی یازدەدا فێریبوویت.

نموونە 1 **شیکارکردنی سیستەمی هێڵی 3 هاوکێشە بە سێ نەزانراو**

ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی ئەو سیستەمە هێڵییەی دێت بەکاربهێنە.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & \textcircled{1} \\ 2x-2y+z=7 & \textcircled{2} \\ x+y+2z=-4 & \textcircled{3} \end{cases}$$

هەنگاوی 1: یەکێك لە سێ نەزانراوەکە لابەە.

وادیارە نەزانراوی y باشترە بۆ لابردن، چونکە هاوکۆلکەکانی لە دوو هاوکێشەی ❶ و ❷ پێچەوانەن.

هاوکێشەی ❶ و ❷ کۆبکەوە.

$$\begin{array}{lr} \textcircled{1} & x+2y-3z=-2 \\ \textcircled{2} & 2x-2y+z=7 \\ \hline & 3x \quad -2z=5 \quad \textcircled{4} \end{array}$$

دوو هاوکێشەی ❶ و ❸ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەیەکی تر بە دوو نەزانراوی x و z.

❶ $x+2y-3z=-2$
❸ $-2(x+y+2z=-4)$

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=-2\\ -2x-2y-4z&=8\\ \hline -x-7z&=6 \end{aligned}$$ ❺

هاوکێشەی ❸ لە -2 بدە و هاوکێشەی ئەنجام لەگەڵ هاوکێشەی ❶ کۆبکەوە.

ئێستا سیستەمێکی هێڵی 2×2 ت هەیە بە بەکارهێنانی لابردن شیکاریبکە.

❹ ❺ $\begin{cases} 3x-2z=5\\ -x-7z=6 \end{cases}$

هەنگاوی 2: نەزانراوێکی دیکە لاببە و هاوکێشەی ئەنجام شیکاربکە بۆ ئەوەی نەزانراوی سێیەمت دەستبکەوێت، نەزانراوی x لابە.

❹ $3x-2z=5$
❺ $3(-x-7z=6)$

$$\begin{aligned} 3x-2z&=5\\ -3x-21z&=18\\ \hline -23z&=23\\ z&=-1 \end{aligned}$$

هاوکێشەی ❺ لە 3 بدە و هاوکێشەی ئەنجام لەگەڵ هاوکێشەی ❹ کۆبکەوە.

هەنگاوی 3: یەکێك لە هاوکێشەکانی سیستەمی 2×2 بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی بەهای x

❶ $-x-7z=6$
❷ $-x-7(-1)=6$
$x=1$

-1 لەجیاتی z دابنێ.

هەنگاوی 4: لە جیاتی x و z بەهایەکانیان دابنێ لەیەکێك لە هاوکێشەکانی سیستەمە دراوەکە بۆ ئەوەی بەهای y هەژماربکەیت.

لەجیاتی دابنێ.

❶ $x+y+2z=-4$
❷ $(1)+y+2(-1)=-4$
$y=-3$

شیکاری سیستەمەکە بریتییە لە $(1, -3, -1)$

هەوڵبدە ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی ئەو سیستەمە هێڵییەی دێت بەکاربهێنە:

$$\begin{cases} -x+y+2z=7\\ 2x+3y+z=1\\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

هەروەها دەتوانیت ڕێگای لەجیاتیدانان بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی سیستەمی هێڵی 3×3.
لێرەش دەتوانیت سیستەمی 3×3 بگۆڕیت بۆ سیستەمی 2×2 .

نموونە 2 جێبەجێکردن لەسەر پێشبڕکێی وەرگرتن

پاڵێوراو	بیرکاری	زانست	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
سوزان	90	60	70	700
ئازاد	60	70	80	590
هوشیار	0	60	60	240

ئەوانەی ئارەزووی وەرگرتنیان لە کۆلێژی ئەندازیاری هەیە، دەچنە ناو پێشبڕکێ لە 3 بابەت ((بیرکاری و زانست و زمانی ئینگلیزی)) بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی نمرەی پاڵێوراوان، لێژنەی پشکنین پشت دەبەستێت بە نمرە بەرزکردنەوەی پاڵێوراوەکان لەهەر بابەتێك ((نمرەکەی لە ژمارەیەك دەدرێت)) لەوانەیە جیاوازبێت لە نمرە بەرزی لە دوو بابەتەکەی تر، لەم خشتەی بەرامبەر نمرەی 3 پاڵێوراو لە سێ بابەتەکە و کۆ نمرەی هەریەکێکیان دوای نمرە بەرزکردنەوەی دەردەکەوێت پێدراوەکانی خشتەکە بۆ دۆزینەوەی نمرە بەرزی هەر بابەتێك بەکاربهێنە.

هەنگاوی 1: گۆڕاوی x بۆ نمرە بەرزی بابەتی بیرکاری و گۆڕاوی y بۆ نمرە بەرزی بابەتی زانست و گۆڕاوی z بۆ نمرە بەرزی زمانی ئینگلیزی بەکاربهێنە بە سیستەمێکی هاوکێشەکان بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 & ❶ \text{ نمرەی سوزان} \\ 60x+70y+80z=590 & ❷ \text{ نمرەی ئازاد} \\ 60y+60z=240 & ❸ \text{ نمرەی هوشیار} \end{cases}$$

تێبینی ئەوەبکە، گۆڕاوی x دیارنییە لە هاوکێشەی سێیەم. چونکە هۆشیار لەوانەی بیرکاری سفری وەرگرتووە، نەبوونی گۆڕاوێك هیچ لە کارەکە ناگۆڕێت، ئەگەر سەیری هاوکێشەی 3 بکەیت، دەتوانیت y بەپێی z بدۆزێتەوە ئەم کارە یارمەتیدەرە بۆ بەکارهێنانی لە جیاتیدانان بۆ گۆڕینی سیستەمەکە بۆ سیستەمی هێڵی بە دوو هاوکێشەی دوو نەزانراو.

هەنگاوی 2: گۆڕاوی y بەپێی گۆڕاوی z بە بەکارهێنانی هاوکێشەی ❸ هەژماربکە.

$60y+60z=240$ $\quad y=4-z$ $\quad$ y بەپێی گۆڕاوی z هەژماربکە.

هەنگاوی 3: بەهای y لە هەردوو هاوکێشەی ❶ و ❷ دا دابنێ.

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 90x+10z=460 & ❹ \\ 60x+10z=310 & ❺ \end{cases}$$

هەنگاوی 4: لابردن بەکاربهێنە بۆ شیکاری ئەو سیستەمەی دەستتکەوتووە هاوکێشەی ❺ لە هاوکێشەی ❹ دەربکە.

$$\begin{array}{ll} 90x+10z=460 & ❹ \\ \underline{60x+10z=310} & ❺ \\ 30x \quad\quad =150 & ❻ \end{array}$$

هەنگاوی 5: ئەو هاوکێشەی دەستتکەوتووە شیکاربکە.

$$30x=150$$
$$x=5$$

هەنگاوی 6: بەهای x لە هاوکێشەی ❹ دا دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای z.

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

هەنگاوی 7: بەهای x و z لە هاوکێشەی ❶ دا دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای y.

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y=180$$
$$y=3$$

شیکارەکە $x=5$، $y=3$، $z=1$ نمرە بەرزی بیرکاری 5 و زانست 3 و ئینگلیزی 1 بەرزدەکرێتەوە.

هەوڵبدە نمرە بەرزکردنەوەی هەر بابەتێك لە پێشبڕکێی وەرگیران لە کۆلێژی پزیشکی بە پێی پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە دیاریکە.

پاڵێوراو	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
شیرین	80	70	50	430
سۆلاڤ	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

ئەو سیستەمەی دێت سیستەمەکی ئەستەمە، ئایا دەتوانیت بگەیتە ئەو ئەنجامە بێ ئەوەی سیستەمەکە شیکاربکەیت؟ ڕوونیبکەوە.

1
$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+2z=3 \\ y+2z=5 \end{cases}$$

چۆن سیستەمێکی هێڵی وەك ئەو سیستەمەی دێت شیکاردەکەیت.

2
$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ y+2z=3 \\ 5z=5 \end{cases}$$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی هەر سیستەمێك بەکاربهێنە.

3
$$\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases}$$

6 **کارگێری کارەکان** بەڕێوبەرایەتی باخچەی ئاژەڵان سێ جۆر پلیت دەفرۆشێت: بۆ منداڵان و نەوجەوانان و تەمەنە گەورەکان. لە خشتەی خوارەوە فرۆشتنی پلیتەکانی چوونە ژوورەوە بۆ باخچەکە لە ماوەی 3 کاتژمێر دەردەکەوێت نرخی هەریەك لەسێ جۆرە پلیتەکە بدۆزەوە.

چوونەژوورەوە بۆ باخچەی ئاژەڵان				
نرخی فرۆشتنەکان بەدینار	منداڵان	نەوجەوانان	گەورەکان	کات
310 000	12	10	5	16 :00 – 15 :00
155 000	4	5	5	17 :00 – 16 :00
92 000	3	2	4	18 :00 – 17 :00

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی هەر سیستەمێك بەکاربهێنە.

7
$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases}$$

9
$$\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases}$$

10 **بۆ خۆشی لە پێشبڕکێی گۆرانیبێژی ئایندە:** لیژنەی بڕیاردان بەپێی 3 پێوەر «بەهرە و وەستان لەسەر شانۆ و بەجێهێنان» پێشبڕکێکەران هەڵدەسەنگێنن بۆ هەریەك لەو پێوەرانە ڕێژەیەکی سەدی لە هەڵسەنگاندنی کۆتایی دیاریکراوە، لەخشتەی خوارەوە هەڵسەنگاندنی سێ لە پێشبڕکێکەران دەردەکەوێت بەپێی هەر پێوانەیەك لەگەڵ هەڵسەنگاندنی کۆتایی هەریەکێکیان. ڕێژەی سەدی هەڵسەنگاندنی کۆتایی هەر پێوەرێك چەندە؟

پێشبڕکێی گۆرانیبێژی پاشەڕۆژ				
پێشبڕکێکەر	بەهرە	وەستان لەسەر شانۆ	بەجێهێنان	هەڵسەنگاندنی کۆتایی
ئاراز	8	9	10	9.2
ڤیان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

11 **وەرزش** لە مێژووی یەکێتی تۆپی سەبەتەی ئەمریکا (لوی دامبیە) یەکەم کەس بوو کۆی خاڵە تۆمارکراوەکانی بگاتە 13 726 خاڵ کە دابەشکراوە بەسەر هەڵدانی سێ خاڵی و دوو خاڵی و یەك خاڵیدا. دامبیە 2 144 خاڵی لەهەڵدانی دوو خاڵی زیاترە لەوەی لە هەڵدانی یەك خاڵی تۆماریکردووە و 1 558 خاڵی لە هەڵدانی یەك خاڵی تۆماریکردووە زیاتر لەوەی لە سێ خاڵی بەدەستهێناوە، چەند خاڵی لەهەر جۆرێك لە هەڵدانەکان تۆماریکردووە.

12 ئەندازیارێك بۆ دروستکردنی هەرەمێکی بنکە سێگۆشە پێویستی بە شیکارکردنی ئەم سیستەمە دەبێت، یارمەتی ئەندازیارەکە بدە بۆ دۆزینەوەی شیکار.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

13 کام لەمانەی خوارەوە دەبێتە شیکاری سیستەمی.

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$$

أ $z=-1$ ، $y=-2$ ، $x=2$ ج $z=-1$ ، $y=1$ ، $x=2$

ب $z=-1$ $y=2$ $x=0$ د $z=2$ ، $y=-2$ ، $x=3$

14 سوزان و میران و ساڤان خوشك و بران، تەمەنی سۆزان دوو ئەوەندەی تەمەنی میرانە، کە تەمەنی میرانیش 12 ساڵ لە تەمەنی ساڤان کەمترە، پاش 5 ساڵ تەمەنی ساڤان دەبێتە دوو ئەوەندەی تەمەنی میران تەمەنی هەریەکەیان چەندە؟

أ سۆزان 6 میران 3 ساڤان 15   ج سۆزان 5 میران 10 ساڤان 22

ب سۆزان 34 میران 17 ساڤان 29   د سۆزان 14 میران 7 ساڤان 19

ڕوانینێك بۆ دواوە

هەریەك لەو سیستەمانە پۆلێنبكە لەنێوان ئەستەم و سنوردار و بێسنوور.

15
$$\begin{cases} 7x+y=13 \\ 28x+4y=-12 \end{cases}$$

16
$$\begin{cases} 2x-3y=-15 \\ 3y-2x=15 \end{cases}$$

17
$$\begin{cases} 8y-24x=64 \\ 9y+45x=72 \end{cases}$$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

18 بە ڕوونكردنەوەیی سیستەمی لاسەنگەكان شیكاربكە، پاشان 3 خاڵی ناوچەی شیكار دیاربكە.

$$\begin{cases} y+8\geq 0 \\ 2y+x<4 \\ x>-6 \end{cases}$$

وانەی 2

پڕۆگرامی هێڵی Linear Programming



بۆچی؟ ئەندازیارەکانی باخچەکان پرۆگرامە هێڵییەکان بەکاردەهێنن بۆ دیاریکردنی ئەو ڕووەکانەی لەسەر ڕووە سەوزەکان دەیانڕوێنن.

ئامانجەکان

- پرسیارەکانی پرۆگرامی هێڵی شیکاردەکات.

زاراوەکان Vocabulary

پرۆگرامی هێڵی Linear programming

مەرج Constraint

ناوچەی گونجاو Feasible Region

نەخشەی بەسوود Objective Function

ڕووە سەوزەکان، ئەو ڕووانەن کە لەجیاتی چیمەنتۆ یان قرمید، بە ڕووەکە سەوزەکان داپۆشراون بۆ کەمکردنەوەی پلەی گەرمی و باشکردنی جۆری هەوا. نرخی ڕووەکەکان و ئەو هێندە ئاوەی پێویستە و ئەو برە دووەم ئۆکسیدی کاربۆنەی ڕووەکەکان دەیمژن، کاریگەری لە هەڵبژاردنەکانی ڕووەکەکان لە لایەن ئەندازیارانی باخچەکان دەکات. **پرۆگرامی هێڵی Linear programming** ڕێگایەکە بۆ دۆزینەوەی گەورەترین یان بچوکترین بەهای نەخشەیەك بەپێی چەند مەرجێك، کە پێیدەوترێت مەرجەکانی پرسیارەکە.

مەرج Constraint بریتییە لە یەکێك لە لاسەنگەکان لە پرسیاری پرۆگرامی هێڵی.
دەتوانرێت ئەو کۆمەڵە شیکارانەی هەموو مەرجەکان جێبەجێ دەکات بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنرێت، ئەمەش ناوچەیەك لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا پەیدادەکات و پێیدەوترێت **ناوچەی گونجاو یان شیکارەکان Feasible Region**.

نموونە 1

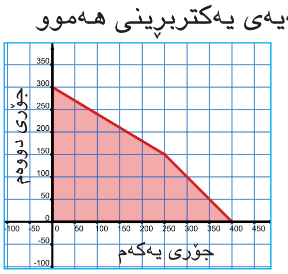
نواندنی ناوچەی گونجاو بە ڕوونکردنەوەیی: سیروان نەخشەی ئەندازەیی باخچەیەك دەکێشێت ڕووبەرەکەی لە $600m^2$ زیاتر نەبێت و دوو جۆرە ڕووەك بەکاردەهێنێت، یەکەم جۆری ڕووەکەکە ڕووبەری $1.2m^2$ دادەپۆشێت، و دووەم جۆری ڕووەکەکە ڕووبەری $2m^2$ دادەپۆشێت، نرخی هەر ڕووەکێك لە دوو جۆرەکە 2500 دینارە. پێویستە تێچوونی ڕووەکەکان لەیەك ملیۆن دینار تێپەڕنەکات، مەرجەکان بنووسە و بە ڕوونکردنەوەی ناوچەی گونجاو بنوێنە.

هێمای گۆڕاوی x بۆ ژمارەی ڕووەکەکانی جۆری یەکەم و y بۆ ژمارەی ڕووەکەکانی جۆری دووەم دابنێ، مەرجەکان بنووسە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

ژمارەی ڕووەکەکان نابێت سالب بێت
ڕووبەری داپۆشراو لە $600\ m^2$ زیاتر نییە.
تێچوونی ڕووەکەکان لە 100 0 000 دینار زیاتر نییە.

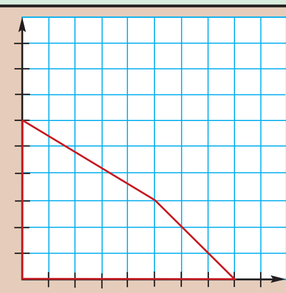
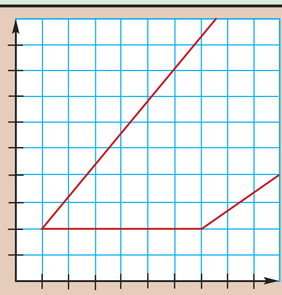
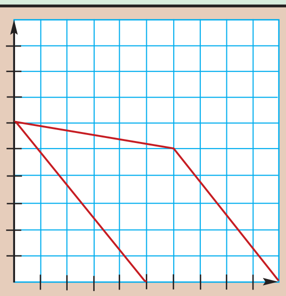
بە ڕوونکردنەوەیی هەموو مەرجەکانی پرسیارەکە شیکاربکە، ئەو ناوچەیەی یەکتربڕینی هەموو ناوچە شیکارەکان پێکدێنێت ڕەنگبکە، ناوچەی دەستکەوتو (ناوچەی ڕەنگکراو) بریتییە لە ناوچەی گونجاو، کە چوارلایەکە خاڵی سەرەکانی بریتیین لە $(0, 0)$، $(400, 0)$، $(250, 150)$، $(0, 300)$.



پاسادانبکە: ئەگەر خاڵێکی وەك $(100, 100)$ هەڵبژێرێت، دەبینیت پۆتانەکەی هەموو مەرجەکان پاسادانەکات. ✓

هەوڵبدە بە ڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاوی $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$ بنوێنە.

کاتێك پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی شیکاردەکەیت، تەنها نواندنی ناوچەی گونجاو لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەس نییە، زۆربەی کات لەسەرت پێویستە بەهای ئەو گۆڕاوانە بدۆزیتەوە، کەوا لە نەخشەکە دەکەن بەهۆی ئەو گۆڕاوانە بەهایەکەی بکاتە گەورەترین یان بچوکترین، بەم جۆرە نەخشانەش دەوترێت **نەخشەی بەسوود (دالة المنفعة) Objective Function** بەپێی ناوچەی گونجاو، دەکرێت نەخشە بەسوودەکە گەورەترین یان بچوکترین یان هەردووکیان پێکەوە یان هیچیان نەبێت.

ناوچە دیاریکراوەکان و ناوچە دیارینەکراوەکان	
ناوچەی گونجاوی دیاریکراو	ناوچەی گونجاوی دیارینەکراو
	 
نەخشە بەسوودەکە بەهای گەورەترین و بچوکترین هەیە.	نەخشە بەسوودەکە بەهای گەورەترین یان بەهای بچوکترین هەیە و هەردووکیانی پێکەوە نییە.

دەتوانرێت بەهۆی بیرکاری باڵاترەوە، ئەمەی خوارەوە بسەلمێنرێت: ئەگەر نەخشەیەکی بەسوود لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی گەورەترین یان بچوکترین بەهای هەبێت، ئەوا نەخشەکە دەکاتە ئەو بەهایە لەسەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو.

سەرەتای (مبدأ) لوتکە لە پرۆگرامی هێڵییدا

ئەگەر نەخشەی بەسوود لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا گەورەترین یان بچوکترین بەهای هەبێت، ئەوا ئەو نەخشەیە دەکاتە ئەو بەهایانە لە سەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو.

نموونە 2

سیروان ئەندازیاری باخچەکانە ئەویەڕی گرنگی بە ڕاگرتنی پاراستنی پیسبوونی هەوا دەدات بۆ گەیشتن بەو مەبەستە، سیروان کار بۆ ئەوە دەکات ژمارەی ئەو ڕووەکانەی زۆرترین دووەم ئۆکسیدی کاربۆن هەڵدەمژن گەورەترین بێت، تێکڕاییەکانی هەڵمژینی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن و پێدراوەکانی نموونەی **1** بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕووەکەکان لەو دوو جۆرە.

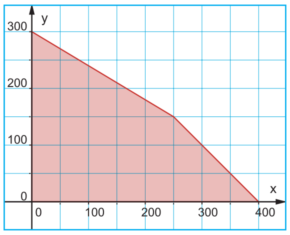


جۆری دووەم



جۆری یەکەم

هەنگاوی 1: بڕی ئەو دووەم ئۆکسیدی کاربۆنەی هەڵدەمژرێت بەگۆڕاوی C هێمابکە، بۆ ژمارەی ڕووەکەکانی جۆری یەکەم x و بۆ ژمارەی ڕووەکەکانی جۆری دووەم y بەکاربهێنە، نەخشەی بەسوود بنووسە. $C = 0.7x + 1.05y$



هەنگاوی 2: مەرجەکانی پرسیارەکە بنووسە و ناوچەی گونجاو بنوێنە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

هەنگاوی 3: بەهای نەخشەی بەسوود لەهەر سەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو هەژماربکە.

(x, y)	$0.7x + 1.05$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشەی بەسوود لەسەری $(250, 150)$ بەهای گەورەترینی هەیە.

سیروان پێویستە 250 لە ڕووەکی جۆری یەکەم و 150 لە ڕووەکی جۆری دووەم بروێنێت بۆ ئەوەی ئەو برە دووەم ئۆکسیدی کاربۆنەی ڕووەکەکانی باخچەکە هەڵیدەمژن بگاتە ئەوپەڕی.

هەوڵبدە گەورەترین بەها بۆ نەخشەی بەسوودی $p = 25x + 30y$ دیاریبکە بەپێی ئەم مەرجانەی خوارەوە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

نموونە 3 جێبەجێکردنەکان

بێستون ڕۆژانە ژەمە خواردنەکان لەناو قوتو ئامادەدەکات بۆ فیستیڤاڵێکی ئەسپسواری بۆ ئەم مەبەستە چەند کرێکارێکی پسپۆڕ و چەند کرێکارێکی ناپسپۆڕی بەکارهێنا کرێی ڕۆژانەی کرێکارێکی پسپۆڕ 60 000 دینار و کرێکارێکی ناپسپۆڕ 40 000 دینارە، بەمەرجێك ئەو کرێیەی دەیانداتێ لە 1 440 000 دینار تێپەڕنەکات، بێستون لە بەرامبەر هەر کرێکارێکی پسپۆڕیدا 3 کرێکاری ناپسپۆڕی پێویستە وتەنها 16 کرێکاری پسپۆڕی لایە، کرێکارێکی پسپۆڕ 25 قوتو لە کاتژمێرێکدا و ناپسپۆڕ 18 قوتو لە کاتژمێرێکدا ئامادە دەکات ژمارەی کرێکارەکان لەهەر جۆرێك بدۆزەوە بۆ ئەوەی ژمارەی ئەو قووتوانەی ئامادە دەکرێن گەورەترین بێت.

1 پرسیارەکە تێبگە

وەڵامەکە لە دوو بەش پێکدێت ژمارەی پسپۆڕەکان و ژمارەی ناپسپۆڕەکان، لیستێك بۆ زانیارییە گرینگەکان دروستبکە.

- کرێی پسپۆڕ 60 000 دینارە لە ڕۆژێکدا، کرێی نا پسپۆڕ 40 000 دینارە لە ڕۆژێکدا.
- بێستون 1 440 000 دیناری دیاریکردوە بۆ ئەوپەڕی کرێ بۆ کرێکارەکان.
- پسپۆڕەکە 25 قوتو لە کاتژمێرێکدا و ناپسپۆڕەکەش 18 قوتو لە کاتژمێرێکدا ئامادە دەکات.
- بێستون بۆ هەر پسپۆڕێك 3 نا پسپۆڕی پێویستە.
- تەنها 16 کرێکاری پسپۆڕی هەیە.

2 پلان بۆ شیکارەکە دابنێ

گۆڕاوی x بۆ ژمارەی کرێکارە ناپسپۆرەکان و گۆڕاوی y بۆ ژمارەی کرێکارە پسپۆرەکان دابنێ مەرجەکانی پرسیارەکەو نەخشەی بەسوود بنووسە. بەپێی زانیارییە گرنگانەی نووسیوتە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

ژمارەی کرێکارەکان سالب نییە.

کرێی کرێکارەکان لە 1 440 000 دینار تێپەڕناکات.

بەلایەنی کەم کرێکارێکی پسپۆڕ بۆ هەر 3 کرێکاری نا پسپۆڕ.

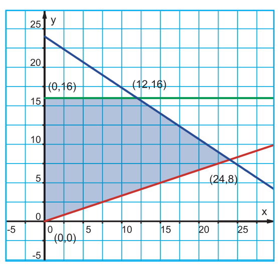
ژمارەی کرێکارە پسپۆڕەکان بریتییە لە 16.

گۆڕاوی p بۆ ژمارەی قووتوە ئامادەکراوەکان لە کاتژمێرێکدا دابنێ نەخشەی بەسوود بریتییە لە

$$p = 18x + 25y$$

3 شیکاربکە

بە ڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو و سەرەکان دیاریبکە پاشان بەهای نەخشە بە سوودەکە لەهەر سەرێکدا هەژماربکە.



$$p(0,0) = 18(0) + 25(0) = 0$$

$$p(0,16) = 18(0) + 25(16) = 400$$

$$p(12,16)1 = 18(12) + 25(16) = 616$$

$$p(24,8)1 = 18(24) + 25(8) = \mathbf{632}$$

نەخشەی بەسوود گەورەترین بەهای دەبێت لەسەری$(24, 8)$ دا، پێویستە بێستون 8 کرێکاری پسپۆڕ و 24 کرێکاری نا پسپۆڕ بەکاربهێنێت.

4 ڕوانینێك بۆ دواوە

دڵنیابە لەوەی جووتە ڕێخراوی$(24, 8)$ هەموو مەرجەکانی پرسیارەکە پاسادان دەکات.

$x \geq 0$	$y \geq 0$	$y \leq 16$
$24 \geq 0$ ✓	$8 \geq 0$ ✓	$8 \leq 16$ ✓
	$y \geq \frac{1}{3}x$	$40000x + 60000y \leq 1440000$
	$y \geq \frac{1}{3}(24)$	$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$
	$8 \geq 8$ ✓	$1440000 \leq 1440\ 000$ ✓

هەوڵبدە بەڕێوەبەری کتێبخانەیەك دەیەوێت دۆڵاب بۆ کتێب بکرێت، کتێبخانەکە پێویستی بە $320\ m$ ڕەفە هەیە، دۆڵابەکانی جۆری یەکەم پێویستیان بە $32\ m$ ڕەفە هەیە و نرخەکەی 200 000 دینارە و دۆڵابەکانی جۆری دووەم پێویستیان بە $16\ m$ ڕەفەی هەیە و نرخەکەی 125 000 دینارە. بەپێی پێوانەکانی هۆڵی کتێبخانە بەلایەنی زۆرەوە 8 دۆڵاب لە جۆری یەکەم و 12 دۆڵاب لە جۆری دووەم دەگرێت، بەڕێوەبەری کتێبخانەکە پێویستە چەند دۆڵاب لە هەر جۆرێك بکرێت بۆ ئەوەی کەمترین پارە بدات؟

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاری

1 چۆن مەرجەکانی پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی دەردەبڕێت؟

2 بەرای تۆ بۆچی ناوچەی شیکار بە ناوچەی گونجاو ناونرا؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بە ڕوونکردنەوەیی هەر ناوچەیەکی گونجاو دیاربکە.

3 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}$

بەهایەکانی x و y بدۆزەوە کە گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها دەدات بە نەخشە بەسوودەکە.

	مەرجەکان	نەخشەی بەسوود	گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها
6	مەرجەکانی پرسیاری ڕاهێنانی 3	$p=10x+16y$	گەورەترین بەها
7	مەرجەکانی پرسیاری ڕاهێنانی 4	$p=3x+5y$	بچوکترین بەها
8	مەرجەکانی پرسیاری ڕاهێنانی 5	$p=2.4x+1.5y$	گەورەترین بەها

9 **پزیشکی ددان** ڕێبوار پزیشکی ددانە و ڕۆژانە 7 کاتژمێر کاردەکات، نیو کاتژمێر بۆ ئەو نەخۆشە دادەنێت کە دەیەوێت ددانی پاك بکاتەوە و 40 000 دیناری لێ وەردەگرێت. و کاتژمێرێك بۆ ئەو نەخۆشە دادەنێت کە چارەسەری پووکی دەکات و 95 000 دیناری لێ دەوەدگرێت.
پزیشکەکە دەتوانێت بەلایەنی زۆرەوە 4 نەخۆش لە ڕۆژێکدا ببینێت کە ڕۆژانە چارەسەری پووکیان دەکەن. ژمارەی پارەکانی پاككردنەوەی ددان و ژمارەی ئەوانەی چارەسەری پوکییان دەکەن بدۆزەوە، بۆ ئەوەی زۆرترین داهات بۆ پزیشکەکە دابین بکات.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بە ڕوونکردنەوەیی هەر ناوچەیەکی گونجاو دیاربکە و پاسادانی شیکارەکەت بکە.

10 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x-4 \\ y \leq x+5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x-7 \end{cases}$

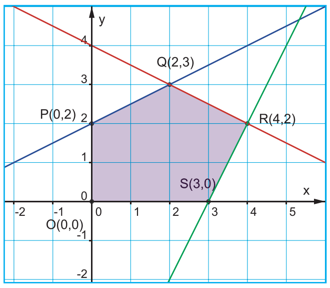
12 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x-3 \\ y \leq -x+4 \end{cases}$

بەهایەکانی x و y بدۆزەوە کە گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها دەدات بە نەخشە بەسوودەکە.

	مەرجەکان	نەخشەی بەسوود	گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها
13	مەرجەکانی پرسیاری ڕاهێنانی 10	$p=-21x+11y$	گەورەترین بەها
14	مەرجەکانی پرسیاری ڕاهێنانی 11	$p=-2x-4y$	بچوکترین بەها
15	مەرجەکانی پرسیاری ڕاهێنانی 12	$p=x+3y$	گەورەترین بەها

16 **پیشەسازی** دەزگای (ڕووناکی) دوو جۆرە پانکە بەرهەم دێنێت دروستکردنی پانکە لە جۆری یەکەم 4 کاتژمێر دەخایەنێت و 000 40 دینار قازانج دەکات، پانکەی جۆری دووەم 6 کاتژمێر دەخایەنێت و 000 80 دینار قازانج دەکات، هێزی بەرهەمهێنانی دامەزراوەکە ڕۆژانە 15 پانکە لە جۆری یەکەم و4 پانکە لە جۆری دووەم تێپەڕناکات، کەمترین ژمارەی کاتژمێرەکانی کارکردنی لەم دەزگایەدا چەندە بۆ ئەوەی بڕی قازانجی ڕۆژانە لە 000 400 دینار کەمترنەبێت؟

17 کام خاڵ گەورەترین بەها دەداتە نەخشەی بەسوودی $P=-x+y$ لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی کە شێوەی بەرامبەر ناوچە گونجاوەکەی دەنوێنێت.



أ P

ب Q

ج R

د S

ڕوانینێك بۆ دواوە

لەهەریەك لەمانە $f(7)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ هەژماربکە.

18 $f(x)=\frac{1}{2x-3}$

19 $f(x)=0.5x$

20 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

سنووردەری هەر ڕیزکراوەیەك بدۆزەوە.

21 $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} -3 & 45 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

وانەی 3

لێکدانی ڕیزکراوەکان Multiplying Matrices



بۆچی؟ خاوەن دامەزراوەیەك ڕیزکراوەکان بۆ دۆزینەوەی دەستکەوتەکان و تێچوونەکان و قازانجەکان بەکاردەهێنێت.

ئامانجەکان

- سیفەتەکانی ڕیزکراوەکان لە لێکدان دەناسێنیت.
- ڕیزکراوەیەك لەیەکێکی دیکە دەدات.

زاراوەکان
Vocabulary

ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە
Matrix product

ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی
Square matrix

تیرەی سەرەکی
Main diagonal

ڕیزکراوەی یەکە
Unit matrix

لە پۆلی یازدەمدا فێربوویت چۆن لێکدانی ژمارەیەك لە ڕیزکراوەیەك بدەیت هەروەها دەتوانیت ڕیزکراوەیەك لە ڕیزکراوەیەکی دیکە بدەیت، لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە ڕیزکراوەیەکی دیکە پەیدادەکات پێدەوترێت **ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە Matrix product** بۆ لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە ئەم دوو ڕێسایە جێبەجێدەکرێت.

- کاتێك دەتوانیت ڕیزکراوەی A لە ڕیزکراوەی B بدەیت واتە هەژماری $A\times B$ یان AB بکەیت، ئەگەر ژمارەی ستونەکانی A یەکسان بێت بە ژمارەی ڕیزەکانی B.
- ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەیەك جۆرەکەی $m\times n$ لە ڕیزکراوەیەك جۆرەکەی $n\times p$ دەدەکاتە ڕیزکراوەیەك لە جۆری $m\times p$.

$$A=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&1&2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&3&3&8\\9&5&2&0\\0&1&6&7\end{bmatrix}$$

A	B		AB
2×3	3×4	→	2×4

ژمارەی ڕیزەکان = ژمارەی ستونەکان

$$C=\begin{bmatrix}3&5\\4&1\\5&8\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&3&3&8&4\\9&5&2&0&6\\0&1&6&7&2\end{bmatrix}$$

C	D	CD
3×2	3×5	پێناسەنەکراوە

ژمارەی ڕیزەکان $\neq$ ژمارەی ستونەکان $(2\neq 3)$

زۆربەی جار نووسینی $A_{m\times n}$ بۆ پیشاندانی جۆری ڕیزکراوە لە پلەی mn.

نموونە 1

جیاکردنەوەی توانای لێکدانی دوو ڕیزکراوە دیاربکە ئایا ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە پێناسەکراوە یان نا، ئەگەر پێناسەکراوە جۆرەکەی دیارییکە.

أ $A_{2\times 5}\ B_{5\times 3}$

A	B	AB
2×5	5×3 =	2×3

لەبەرئەوەی ژمارەی ستونەکانی ڕیزکراوەی A یەکسانە بەژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی B ئەوا ئەنجامی لێکدانی AB پێناسەکراوە، وبریتییەلە ڕیزکراوەیەك لەجۆری 2×3.

ب $C_{4\times 3}\ D_{4\times 5}$

C	D	CD
4×3	4×5	پێناسەنەکراوە

لەبەرئەوەی ژمارەی ستونەکانی ڕیزکراوەی C یەکسان نییە بەژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی D ئەوا ئەنجامی لێکدانی CD پێناسەنەکراوە.

ڕۆشنایی

ئەمەت لەبیربێت: بۆ ئەوەی ئەنجامی لێکدانی دو ڕیزکراوە پێناسەکراوبێت، پێویستە ژمارەی ستوونەکانی ریزکراوەی چەپ یەکسان بێت بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی ڕاست.

هەوڵبدە ڕیزکراوەکانی نموونەی 1 بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان، ڕوونیبکەوە ئایا لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە پێناسەکراوە یان نا ئەگەر پێناسەکرابوو جۆرەکەی دیاربکە.

أ BA **ب** DC **ج** DB

وەك چۆن بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی A ئاسۆییانە سەیری ڕیزکراوەکەت کرد و بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ستونەکانی ڕیزکراوەی B بە ئەستونی سەیری ڕیزکراوەکەت کرد بۆ ئەوەی بڕیار لەوە بدەیت کە لێدانی AB پێناسەکراوە یان نا. هەمان کاردەکەیت بۆ هەژمارکردنی ژمارەی دانەکانی ئەنجامی لێکدانی دووو ڕیزکراوە.

بە وشە	بە ژمارە	بە جەبر
بۆ هەژمارکردنی دانەی P_{kj} لە ڕیزکراوەی $P=AB$ هەر دانەیەکی ڕیزی k لە ڕیزکراوەی A لە دانە بەرامبەرەکەی لە ستونی j بدە لە ڕیزکراوەی B، پاشان ئەنجامەکانی ئەو لێکدانانە کۆبکەوە.	$P=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\times5+2\times7&1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7&3\times6+4\times8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c_1&c_2\\d_1&d_2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2d_1&a_1c_2+a_2d_2\\b_1c_1+b_2d_1&b_1c_2+b_2d_2\end{bmatrix}$

نموونە 2

لێکدانی ڕیزکراوەکان

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە $A=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}11&-1\\12&10\end{bmatrix}$

ئەنجامی لێکدانەکان هەژماربکە (ئەگەر پێناسەکرابوو)

أ AB

جۆرەکان بپشکنە بۆ ئەوەی بڕیاربدەیت کە لێکدانەکە پێناسەکراوە، جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 3×2، جۆری ڕیزکراوەی B بریتییە لە 2×3، ئەنجامی لێکدانیان AB پێناسەکراوە لە جۆری 2×2 ـە ڕیزی یەکەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی یەکەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە ئەنجامەکە لە شوێنی دانەی C_{11} لە ڕیزکراوەی C دا بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&?\\?&?\end{bmatrix}\leftarrow 0(5)+4(-2)+9(6)$$

ئێستا ڕیزی یەکەمی ڕیزکراوەی A لە ستونی دووەمی ڕیزکراوەی B بدە. وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە ئەنجامەکە لە شوێنی دانەی C_{12} لە ڕیزکراوەی C دا بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\?&?\end{bmatrix}\leftarrow 0(1)+4(7)+9(0)$$

ڕیزی دووەمی ڕیزکراوەی A لە ستونی یەکەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە ئەنجامەکە لە شوێنی دانەی C_{21} لە ڕیزکراوەی C دا بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\-9&?\end{bmatrix}\leftarrow (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

ڕیزی دووەمی ڕیزکراوەی A لە ستونی دووەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە ئەنجامەکە لە شوێنی دانەی C_{22} لە ڕیزکراوەی C دا بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\-9&18\end{bmatrix}\leftarrow (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

کەواتە $C=AB=\begin{bmatrix}46&28\\-9&18\end{bmatrix}$

ئاگاداربە!

تێبینی ئەو بکە ئەنجامی لێکدانی AB یەکسان نییە BA چونکە سیفەتی ئاڵوگۆڕ لە لێکدانی ڕیزکراوەکان نییە.

ب BA

جۆرەکان بپشکنە بۆ ئەوەی بڕیاربدەیت کە ئەنجامی لێکدانەکە پێناسەکراوە، جۆری ڕیزکراوەی B بریتییە لە 3×2 و جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 2×3 ئەنجامی لێکدانی BA پێناسەکراوە و لە جۆری 3×3.

$$BA=\begin{bmatrix}5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2)\\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2)\\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 23 & 47\\ -21 & 13 & -4\\ 0 & 24 & 54\end{bmatrix}$$

ج AD

جۆرەکان بپشکنە بۆ ئەوەی بڕیاربدەیت کە لێکدانیان پێناسەکراوە جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 2×3 و جۆری ڕیزکراوەی D بریتییە لە 2×2 ئەنجامی AD پێناسەنەکراوە.

هەوڵبدە **2.** ئەنجامی لێکدانی ئەمانە هەژماربکە.

أ BD **ب** DA

ڕیزکراوەکان بەکاردێن لە کارگێڕی و هەژمارکردنی داهاتەکان و تێچوونەکان و قازانجەکان.

نموونە 3

جێبەجێکردن لەسەر دەرخستە (جرد)



کۆمپانیایەکی پێداویستی وەرزشی دوو جۆر پۆشاکی ڕاکردن لە دوو کۆگای جیاوازدا دەفرۆشرێت خشتەی یەکەم کاڵاکانی ناو هەردوو جۆر پۆشاکەکە دەنوێنێت و دووەمیش نرخی فرۆشتن و تێچوون و قازانجی یەکەیەک لە یەکەکانی هەرجۆرێك دەنوێنێت. تێچوونی گشتی هەردوو جۆر پۆشاکەکە لەهەر کۆگایەکدا بدۆزەوە.

کاڵاکانی هەردوو کۆگاکە		
	ئاسایی	نایاب
کۆگای 1	14	10
کۆگای 2	7	8

نرخی داهاتەکان و تێچوونەکان و قازانجەکان بە هەزاران دینار			
	نرخ	تێچوون	قازانج
ئاسایی	89	44	45
نایاب	119	58	61

لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی داهاتەکان و تێچوونەکان و قازانجەکان بۆ هەر کۆگایەك.

$$\begin{bmatrix}14 & 10\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}89 & 44 & 45\\ 119 & 58 & 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61)\\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61)\end{bmatrix}$$

داهاتەکان تێچوونەکان قازانجەکان

$$=\begin{bmatrix}2436 & 1196 & 1240\\ 1575 & 772 & 803\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{کۆگای 1}\\ \text{کۆگای 2}\end{matrix}$$

تێچوونی پێداویستییەکان لە کۆگای 1 بریتییە لە 1196000 دینار و لە کۆگانی 2 دا 772000 دینار.

هەوڵبدە **3.** کاڵاکانی کۆگای ژمارە 2 بگۆڕە بە 6 لەجۆری ئاسایی و 9 لەجۆری نایاب ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدان هەژماربکەوە قازانجەکانی کۆگای 2 دیاربکە.

ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی Square matrix ئەو ڕیزکراوەیە کە ژمارەی ڕیزەکان و ستونەکانی یەکسانن ڕیزکراوەیەکە لە جۆری $m \times m$

تیرەی سەرەکی Main diagonal لە ڕیزکراوەی چوارگۆشەییدا بریتییە لەو تیرەیەی کە گۆشەی سەرەوە لە چەپ بە گۆشەی خوارەوە لە ڕاست دەگەیەنێت.

ڕیزکراوەی یەکە Unit matrix ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەییە هەموو دانەکانی سفرە جگە لە دانەکانی سەر تیرەی سەرەکی دەکاتە 1.

یەك ڕیزکراوەی یەکە بۆ هەموو جۆرێك لە جۆرەکانی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی $n \times n$ هەیە.

ڕیزکراوەی یەکە جۆری 2×2 بریتییەلە $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و لە جۆری 3×3 بریتییەلە $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

لە لێکدانی ڕیزکراوەکان، ڕیزکراوەی یەکە لە جۆرێکی دیاریکراو ڕۆڵی ژمارە 1 دەبینێت لە لێکدانی ژمارەکان ئەگەر A ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی بێت لە جۆری $m \times m$ ئەوا $AI_m = I_m A = A$.

ئەگەر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ئەوا:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 7 \times 0 & 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ -1 \times 1 + 4 \times 0 & -1 \times 0 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

و

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-1) & 1 \times 7 + 0 \times 4 \\ 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 0 \times 7 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

لەبەرئەوەی دەکرێت ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی لەخۆی بدرێت، دەتوانرێت ئەم کردارە چەند جارێك بکرێت و هێزی ئەو ڕیزکراوە دەستدەکەوێت.

نموونە 4 **هێزەکانی ڕیزکراوە چوارگۆشەییەکان**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ئەگەر دەکرێت هەژماری بکە.

أ A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 7 + 3(-2) & 7 \times 3 + 3 \times 0 \\ -2 \times 7 + 0 \times (-2) & -2 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times 0 + 1(-1) & 2 \times 1 + 4(-2) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 0 \times 5 + (-2) \times 1 & 5 \times 4 + 0 \times 0 + (-2)(-1) & 5 \times 1 + 0(-2) + (-2) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 3(-1) & 1 \times 1 + (-1)(-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

هەوڵبدە **4.** ئەگەر دەکرێت هەژماری ڕیزکراوەکە بکە.

أ C^2 **ب** A^3 **ج** B^3 **د** I^4

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەو مەرجە چییە پێویستە هەبێت لە دوو ڕیزکراوەی A و B بۆ ئەوەی بتوانین AB بدۆزینەوە.

2 ئەو هەنگاوانە ڕوونبکەوە بۆ لێکدانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ پەیڕەوی دەکەیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئایا ئەنجامی لێکدان پێناسەکراوە یان نا؟ ئەگەر پێناسەکراوە جۆرەکەی دیاریبکە.

3 $A_{4\times5}B_{5\times3}$ **4** $B_{5\times3}A_{4\times5}$ **5** $C_{9\times5}D_{5\times9}$

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 6 تا 9 ئەنجامی لێکدان هەژماربکە ئەگەر دەکرێت.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}،\ B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}،\ C=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}،\ D=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}،\ I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 BA **7** CA **8** DC **9** BI

ئەم ڕیزکراوانەی دێن بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 10 هەتا 12 هەر هێزێك هەژماربکە ئەگەر دەکرێت.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}،\ C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10 A^2 **11** A^3 **12** C^2

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئایا ئەنجامی لێکدان پێناسەکراوە یان نا، ئەگەر پێناسەکراوە جۆرەکەی دیاریبکە.

13 $A_{2\times1}B_{2\times3}$ **14** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **15** $C_{3\times5}D_{5\times1}$

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 16 تا 19 ئەنجامی لێکدان هەژماربکە ئەگەر دەکرێت.

$$A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}،\ B=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}،\ C=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}،\ I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16 AB **17** CA **18** BA **19** CI

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکانی 20 تا 23 بەسادەترین شێوە ئەنجام بنووسە، ئەگەر کرا.

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix}\quad S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

20 S^2 **21** B^2 **22** S^3 **23** Q^3

24 بەهای x بدۆزەوە، بۆ ئەوەی یەکسانییە ڕیزکراوەییەکە ڕاست بێت.

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & \frac{x}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -19\\ 24 & -26\end{bmatrix}$$

ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر بڕێك هەژماربکە، ئەگەر دەکرێت.

$S=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ و $T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.83\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ و $V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

25 $S+T$ **26** $V-T$ **27** $4T$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

28 سنووردراوی ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ بدۆزەوە،

ئایا دەتوانیت ڕیزکراوەی $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ بدۆزێتەوە کە پاسادانی $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ دەکات؟ ڕوونیبکەوە.

وانەی 4

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکان Inverse of a matrix



بۆچی؟

ئەوانەی کار لە کردنەوەی جفرەکاندا دەکەن بۆ دروستکردن و پاراستنی نهێنی نامەکان هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنن.

ئامانجەکان

- بڕیاردەدات ئایا ڕیزکراوێك هەڵگەڕاوەی هەیە یان نا.
- دۆزینەوەی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی 2 ×2 دەدۆزێتەوە ئەگەر هەبێت.
- سیستمی هاوکێشەی هێڵی بە بەکارهێنانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە دەدۆزێتەوە.

زاراوەکان Vocabulary

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە Inverse of a matrix

هاوکێشەی ڕیزکراوەیی Matrix equation

ڕیزکراوەی نەزانراوەکان Variable matrix

ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان Constant matrix

دەتوانیت نامەیەك بە جفرە بکەیت بەهۆی ڕیزکراوەکان. ئەوەی نامەکەی پێدەگات کرداری پێچەوانە بەکاردەهێنێت بۆ کردنەوەی جفرەکە و خوێندنەوەی نامەکە، بۆ ئەوەی ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی هەبێت پێویستە چوارگۆشەیی بێت. بەڵام ئەم مەرجە تاکە مەرج نییە، چونکە ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی هەیە هەڵگەڕاوەی نییە ئەگەر ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی A لە ڕیزکراوەی B یەکسان بێت بە ڕیزکراوەی یەکە I ئەوا $AB=BA=I$ لەم بارەدا بە ڕیزکراوەی B دەوترێت **هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A Inverse of a matrix** و بە A^{-1} هێمادەکرێت.

نموونە 1 دیاریکردنی ئایا ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەیەکی ترە.

دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A ـە.

أ $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

لەبەرئەوە ئەنجامی لێکدان بریتییە لە ڕیزکراوەی یەکە، کەواتە ڕیزکراوەی B بریتییە لە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A.

ب $A=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}$

بەبیرهێنانەوە

ڕیزکراوەی یەکە لەجۆری n بریتییە لە ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی جۆری n، کە هەموو دانەکانی سفرە جگە لە دانەکانی تیرەی سەرەکی کە هەموو یان 1 ن، ڕیزکراوەی یەکە جۆری 3 بریتییە لە :

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بەپێی ئەوەی پێشوو ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A نییە.

هەوڵبدە دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A ـە.

$$B = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 1.2 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ ، } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی لە پلە 2

ئەگەر سنووردەری ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سفر نەبێت، ئەوا ئەو ڕیزکراوە هەڵگەڕاوەیەکی هەیە و بریتییە لە $M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (کاتێک $|M|$ سنووردەری ڕیزکراوەی (M)ە)

ئەو ڕیزکراوەی سنووردەرەکەی سفرە هەڵگەڕاوەی نییە.

نموونە 2

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی پلە دوو

ئەگەر هەبوو هەڵگەڕاوەی ئەو ڕیزکراوە بدۆزەوە.

أ $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

هەژماری سنووردەری ڕیزکراوەکە بکە.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2 \times 3 = 2 \neq 0$$

لەبەرئەوەی سنوودەری ڕیزکراوەکە سفر نییە ئەوا هەڵگەڕاوەی هەیە.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ب $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

هەژماری سنووردەری ڕیزکراوەکە بکە.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 12 - 2 \times 3 = 0$$

لەبەرئەوەی سنووردەری ڕیزکراوەکە سفرە، ئەوا هەڵگەڕاوەی نییە.

ڕۆشنایی

بۆ دەستکەوتنی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، لە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

a و d ئاڵوگۆڕ بکە و نیشانەی دوو دانەکەی تر بگۆڕە.

هەوڵبدە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

دەتوانیت ڕیزکراوەکان بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی سیستەمی هاوکێشە هێڵییەکان، بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان. شیکارکردنی هاوکێشەکان دەگۆڕدرێت بۆ کردارێك وەك شیکاری هاوکێشەی هێڵی $5x = 20$ بە لێکدانی $\frac{1}{5}$ هەردوو لای هاوکێشەکە لە هەڵگەڕاوەی هاوکۆڵکەی 5 واتە. بۆ جێبەجێکردنی ئەم کارە سیستەمی هاوکێشەکان دەگۆڕێت بۆ **هاوکێشەی ڕیزکراوەیی $AX=B$ Matrix equation** کاتێك A هێمای ڕیزکراوەی هاوکۆڵکەکانی سیستەمەکە بێت و X هێمای **ڕیزکراوەی نەزانراوەکان Variable matrix** بێت و هەروەها B هێمای **ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان Constant matrix** بێت.

ئەو هاوكێشە ڕیزكراوەییەی كە سیستەمی دوو هاوكێشەی هێڵی $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ دەنوێنێت، بریتییە لە

$$\begin{matrix} A & \bullet & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ڕیزكراوەی هاوكۆڵكەكان ← A

ڕیزكراوەی نەگۆڕەكان ← B

ڕیزكراوەی نەزانراوەكان ← X

بۆ شیكاركردنی هاوكێشەی ڕیزكراوەیی $AX=B$ هەردوو لای هاوكێشەكە لە هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوەی A بدە (گریمان بكە هەڵگەڕاوەی هەیە).

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ئەنجامی لێكدانی ڕیزكراوەی A لە هەڵگەڕاوەكەی بریتییە لە ڕیزكراوەی یەكە I.

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

نموونە 3

شیكاركردنی سیستەمی هاوكێشە هێڵییەكان بە بەكارهێنانی هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوە.

ئەو هاوكێشە ڕیزكراوەییەی سیستەمی هێڵی $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ دەنوێنێت بنووسە، پاشان شیكاریبكە.

هەنگاوی 1: ئەو هاوكێشە ڕیزكراوەییەی سیستەمی دوو هاوكێشەكە دەنوێنێت بنووسە.

$$\begin{matrix} A & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

هەنگاوی 2: سنووردەری ڕیزكراوەی هاوكۆڵكەكان بدۆزەوە.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-1\times2 = -1 \neq 0$$

هەنگاوی 3: هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوەی هاوكۆڵكەكان بدۆزەوە.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 4: شیكاربكە.

$$\begin{matrix} X = & A^{-1} & B \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

كەواتە شیكار: $x=-7$ و $y=15$.

هەوڵبدە **3.** ئەو هاوكێشە ڕیزكراوەییەی سیستەمی هێڵی $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ دەنوێنێت بنووسە، پاشان شیكاریبكە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

ئەنجامی لێكدان بنووسە بێئەوەی كرداری لێكدانی دوو ڕیزكراوەكە ئەنجام بدەیت.

1 أ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

2 ڕێگایەك بۆ بەكارهێنانی سنووردەری ڕیزكراوە باسبكە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی یەکەم هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی دووەمە.

3 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە (ئەگەر هەبێت).

5 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

سیستمی هاوکێشەکان بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە.

8 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی یەکەم هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی دووەمە.

10 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە (ئەگەر هەبێت).

12 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

سیستمی هاوکێشەکان بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە.

15 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

17 **هەنگاوی جۆراوجۆر** یانەی هەندرێن گەشتێکی دەریایی ڕێکخست کە 7 بەلەمی تێدا بەکارهاتبوو کە دوو جۆربوون، جۆری گەورە 6 کەسی دەگرت و جۆری بچوك 2 کەسی دەگرت، وژمارەی گەشتکەران 34 کەس بوو، پرسیارەکە بە سیستەمی هێڵی $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$ دەردەبڕێت، کاتێك x هێمای ژمارەی بەلەمە گەورەکانە و y ژمارەی بەلەمە بچوکەکانە.

أ ڕیزکراوەی هاوکۆڵکەکان بنووسە؟

ب سیستەمەکەی پێشوو بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە؟

ج هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی هاوکۆڵکەکان بنووسە.

د شیکاری هاوکێشەی ڕیزکراوەییەکە بکە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بەلەمەکانی هەر جۆرێك؟

18 **هەڵە لە شیکارکردن** هەریەك لە شوان و ساڤان هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ یان هەژمارکرد کامیان هەڵەیان کردووە؟ و هەڵەکە دیاربکە.

أ شوان $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ب ساڤان $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

19 **بۆ خۆشی** باوكت پێی ڕاگەیاندی كە 5000 دینار لە گیرفانیدایە، پێكهاتووە لە پارچەی 50 دیناری و 100 دیناری ئەو برە پارەیەت دەداتێ ئەگەر بزانیت چەند پارچە لەهەر پارچەیەك لە گیرفانیدایە، بۆ یارمەتیدانت پێی ووتی ژمارەی پارچەكان هەمووی 73 پارچەیە، هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوە بەكاربهێنە بۆ بردنەوەی 5000 دینارەكە.

20 بۆچوونە ژوورەوەی باخچەی ئاژەڵان شێرزاد 24 000 دیناری دا لە بری 7 پلیتی منداڵان و 2 پلیتی گەوران، مازن 46 000 دیناری دا لە بری 4 پلیتی گەوران و 13 پلیتی منداڵان، نرخی پلیتی گەورە بە نەزانراوی x هێمابكە و نرخی پلیتی منداڵان بە نەزانراوی y هێمابكە.

- **أ** بەهۆی سیستەمی هاوكێشەكان ئەم پرسیارە دەرببڕە.
- **ب** ئایا سنووردەری ڕیزكراوەی هاوكۆڵكەكان یەكسانە بە سفر؟ ژمارەی شیكارەكانی چەندە؟
- **ج** شێوەی ڕیزكراوەیی و هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوە بەكاربهێنە بۆ دۆزینەوەی x و y.
- **د** نرخی پلیتی گەورە چەندە؟ نرخی پلیتی منداڵان چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

21 ڕێگای لابردن بۆ شیكاركردنی سیستەمی هاوكێشەكان بەكاربهێنە

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-6z=5 \\ -4x-5y+0.25z=-9 \end{cases}$$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

22 ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$ بكێشە و پۆوتانی سەرەكەی دیاربكە.

بەشی 3

نەخشەکان

Functions



وانەکان

1. نەخشە ڕادەدارەکان
2. نەخشەکانی گۆڕان
3. نەخشە توانییەکان
4. نەخشە لۆگاریتمییەکان

وانەی 1

نەخشە ڕادەدارەکان

Polynomial Functions



بۆچی؟

پزیشک دەتوانێت نەخشە ڕادەدارەکان بەکاربهێنێت بۆ دروستکردنی نموونەیەک بۆ ناردنی خوێن لەدەمارەکان

ئامانجەکان

- نەخشەی سێجا دەناسێنیت.
- نەخشەی ڕادەدار دەناسێنێت
- ڕوونکردنەوەی نەخشە ڕادەدارەکان دەکێشێت.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە نەخشە ڕادەدارەکان لەخۆدەگرن.
- بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێیی دەناسێت.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی سێجا
Cubic function

نەخشەی ڕادەدارەکان
Polynomial funtion

پلەی نەخشەی ڕادەدار
Degree of a Polynomial function

لەهەردوو پۆلی دەیەم و یازدەمدا نەخشە هێڵییەکانت خوێند، کە بە شێوەی $f(x)=ax+b$ دەنووسرێن کاتێك $a\neq 0$، و نەخشەی دووجا بەشێوەی $f(x)=ax^2+bx+c$ دەنووسرێت کاتێك $a\neq 0$.

لەم پۆلەشدا نەخشە سێجاییەکان و بەشێوەیەکی گشتی نەخشە ڕادەدارەکان دەخوێنین.

نەخشە سێجایەکان

نەخشە سێجایەکان بریتین لەو نەخشانەی بەشێوەی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ دەنووسرێن کاتێك $a\neq 0$.

دەتوانیت ئەو نەخشانە بهێنیتە بەرچاوی خۆت کە بەشێوەی $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+c$ دەنووسرێت کاتێك $a_n\neq 0$ یان بەشێوەیەکی گشتی $h(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$.

بەنەخشەی g سەرەوە دەوترێت **نەخشەی ڕادەدار بەپلە چوار**، و بە h دەوترێت **نەخشەیەکی ڕادەدار بە پلەی** n .

نموونە

Increasing	ڕوو لەزیادبوون
Decreasing	ڕوو لەکەمبوون
Turning point	خاڵی شلۆق
Local maximum	بەهای گەورەترین خۆجێی
Local minimum	بەهای بچوکترین خۆجێی
Local extremum	بەهای ئەوپەڕی خۆجێی

1 جێبەجێکردنی پزیشکی

پزیشکەکان بڕی ئەو خوێنەی دڵ دەینێرێتە بۆرییەکانی خوێن دەپێون، بەهۆی تێکردنی شلەیەکی ڕەنگاوڕەنگ لەخوێنبەرێك لەنزیك دڵ بەهۆی دەرزییەك، پاشان پێوانی بڕی ئەو ماددەیە کە لەناو بۆرییەکانی خوێن پەرت دەبێت، نەخشەی $f(t)=0.0056t^3-0.22t^2+2.33t$ نموونەیەك پێکدەهێنێت بۆ پێوانی ماددە ڕەنگاوڕەنگەکە (بە ملگم لە لیترێك) لەناو خوێن بەپێی کات t (بەچرکە لە $0\leq t\leq 23$) کە کاتی تێپەڕبووە لە پێدانی ماددە ڕەنگاوڕەنگەکە.

أ بەهای $f(t)$ لە $t=0$ و $t=3$ بدۆزەوە.

ب هەر بەهایەك چی دەردەبڕێت، باسبکە.

شیکار

أ $f(0)=0.0056(0)^3-0.22(0)^2+2.33(0)=0$

$f(3)=0.0056(3)^3-0.22(3)^2+2.33(3)=5.1612$

ب هێندی $f(0)$ ڕێژەی ماددە ڕەنگکراوەکە (بە ملگم لە لیترێك) لەخوێن دەنوێنێت لەسەرەتای پێدانی ماددە ڕەنگکراوەکە بەڵام $f(3)$ ڕێژەی ماددە ڕەنگکراوەکە (بەملگم لەلیترێك) لەخوێن دەنوێنێت پاش تێپەڕبوونی 3 چرکە لەپێدانی ماددەکە.

هەوڵبدە بۆ نەخۆشێکی تر، نەخشەی $f(t)=0.000468t^4-0.016t^3+0.095t^2+0.806t$ نمونەیەکە بۆ پێوانی ماددە ڕەنگکراوەکە بە (ملگم لەلیتر) لەخوێن بەپێی کاتی تێپەڕبوو (t بەچرکە) بەسەر پێدانی ماددە ڕەنگکراوەکە. بەهای $f(t)$ لە $t=4$ و $t=17$ بدۆزەوە. هەر بەهایەك چی دەگەیەنێت، باسیبکە.

نمونە 2

کێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی سێجا

نەخشەی $f(x)=x^3-3x$ بەکاربهێنە.

أ خشتەی بەرامبەر تەواوبکە.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

ب لەڕووتەختی پۆتانەکان، خاڵاکانی $(x,\ f(x))$ دیاربکە کە لە خشتەکەدا هاتووە.

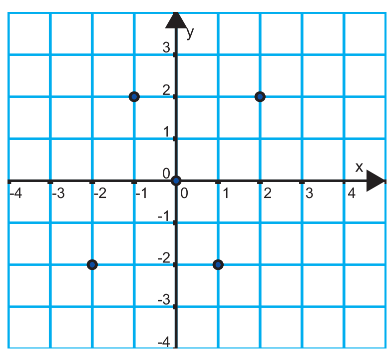
ج ئەم خاڵانە بە چەماوەیەکی گونجاو ببەستەوە.

شیکار

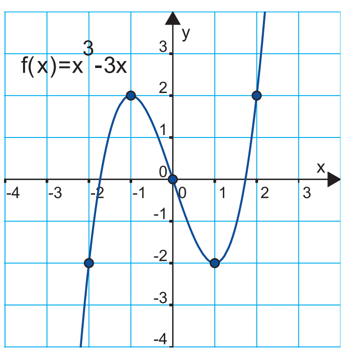
أ

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

ب



ج



هەوڵبدە نەخشەی $f(x)=x^4-8x^2+1$ بەکاربهێنە.

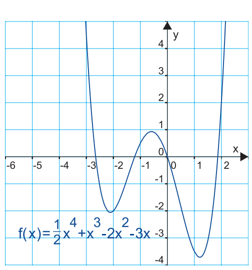
أ خشتەی بەرامبەر تەواوبکە.

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	3
$f(x)$							

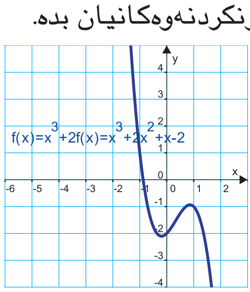
ب لەڕووتەختی پۆتانەکان، خاڵاکانی $(x,\ f(x))$ دیاربکە کە لەخشتەکەدا هاتووە.

ج ئەم خاڵانە بە چەماوەیەکی گونجاو ببەستەوە.

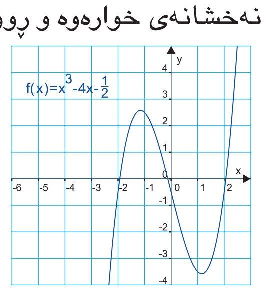
چالاکی سەرنجی ئەم نەخشانەی خوارەوە و ڕوونکردنەوەکانیان بدە.



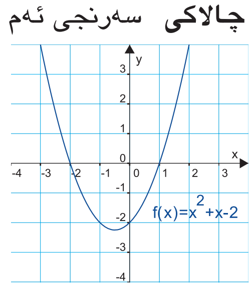
$k(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3-2x^2-3x$



$h(x)=-2x^3+2x^2+x-2$



$g(x)=x^3-4x-\frac{1}{2}$



$f(x)=x^2+x-2$

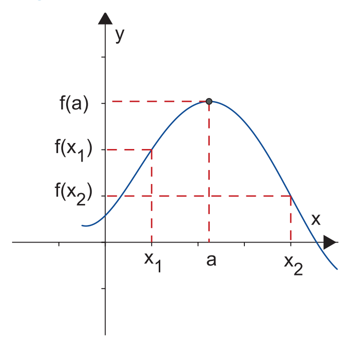
خشتەی بەرامبەر تەواوبکە، ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك لەسەرکەوتن بۆ دابەزین و بە پێچەوانە دیاربکە.

نەخشە	پلە	ژمارەی
f	2	1
g		
h		
k		

بەهاکانی ئەوپەڕی نەخشەی ڕادەدارەکان

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بەرەو سەرەوە دەچێت پاشان لێژ دەبێتەوە بەرەو خوارەوە لەماوەیەکی بوارەکەیدا. نەخشەکە بەهای گەورەترین خۆجێی **Local Maximum** وەردەگرێت لەو ماوەیەدا. بەڵام ئەگەر ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بۆ خوارەوە لێژبێتەوە پاشان بەرەو سەرەوە بەرزبێتەوە لەماوەیەکی بوارەکەییدا ئەوا نەخشەکە بەهای بچوکترین خۆجێی **Local Minimum** دەبێت لەو ماوەیەدا.

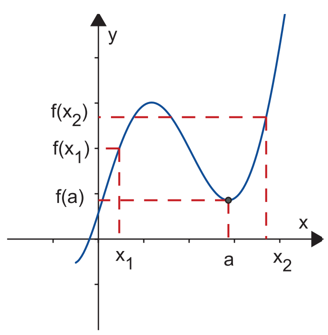
بەهای گەورەترین خۆجێ



ئەگەر $x \neq a$ لەماوەی نێوان x_1 و x_2 ئەوا

$$f(x) < f(a)$$

بەهای بچوکترین خۆجێ



ئەگەر $x \neq a$ لەماوەی نێوان x_1 و x_2 ئەوا

$$f(x) > f(a)$$

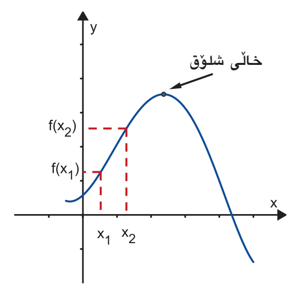
بەهایەکانی ئەوپەڕی

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت **بەهای گەورەترین خۆجێی** ئەگەر $f(x) < f(a)$ بەهای x هەرچەندبێت لەهاوسێی a کاتێك $x \neq a$.

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت **بەهای بچوکترین خۆجێی** ئەگەر $f(x) > f(a)$ بەهای x هەرچەندبێت لەهاوسێی a کاتێك $x \neq a$.

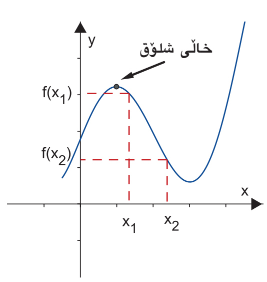
بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت **بەهای ئەوپەڕی خۆجێی** ئەگەر بەهای گەورەترین خۆجێ یان بەهای بچوکترین خۆجێی بێت.

بەوردی سەرنجی هەردوو وێنەی خوارەوە بدە. تێبینیبکە کە ڕوونکردنەوەکە لەوانەیە بەرەو سەرەوە یان بەرەو خوارەوە بێت. بەنەخشەیەك دەوترێت ڕوولەزیادبوونە لەماوەیەکی بوارەکەیدا، ئەگەر ڕوونکردنەوەکەی بەرەو سەرەوە بێت لەو ماوەیەدا. هەروەها بەنەخشەیەك دەوترێت ڕوو لەکەمبوونە لەماوەیەکی بوارەکەیدا، ئەگەر ڕوونکردنەوەکەی لەو ماوەیەدا بەرەو خوارەوە بێت.



ئەگەر $x_1 < x_2$ لەماوەی ڕوو لەزیادبوون، ئەوا

$$f(x_1) < f(x_2)$$



ئەگەر $x_1 < x_2$ لەماوەی ڕوو لەکەمبوون، ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$.

بەخاڵەکانی ڕوونکردنەوەی بەهای ئەوپەڕی خۆجێ دەوترێت خاڵە شلۆقەکان لەڕێڕەوی نەخشەکە. نەخشەکە لەکاتی تێپەڕبوونی بەو خاڵانەدا لە ڕوولەزیادبوون بۆ ڕوولەکەمبوون دەگۆڕێت و بە پێچەوانەوە. نەخشەی سێجا دوو خاڵی شلۆقی بەلایەنی زۆری هەیە. بەڵام نەخشەی پلەچوار بەلایەنی زۆری 3 خاڵی شلۆقی هەیە. بەشێوەیەکی گشتی، ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەیەکی ڕادەدار لە پلە n بریتیە لە $n-1$ بەلای زۆری.

ڕوولەزیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکان

x_1 و x_2 دوو ژمارەن ماوەیەکی بواری نەخشەی $f(x)$.

نەخشەکە ڕوولەزیادبوون دەبێت لەوماویەدا ئەگەر ئەم مەرجە پاسادان بکات:

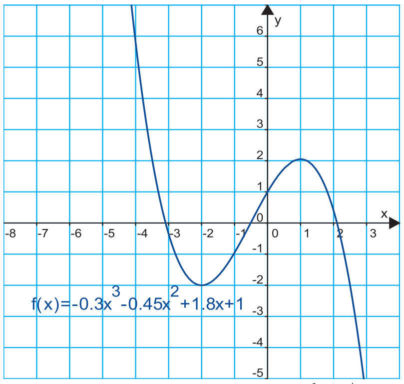
ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) < f(x_2)$.

نەخشەکە ڕوولەکەمبوون دەبێت لەوماویەدا ئەگەر ئەم مەرجە پاسادان بکات:

ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$.

نموونە 3

سەرنجی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بدە کە نەخشەی $f(x) = -0.3x^3 - 0.45x^2 + 1.8x + 1$ دەنوێنێت.



أ ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی ئەم ڕوونکردنەوە چەندە؟

ب ژمارەی بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێی چەندە و جۆری هەریەکەیان چییە؟

ج هەموو بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێی و بەهای x ـ کانیان بدۆزەوە؟

د ماوەکانی ڕوولەزیادبوون و ڕوولەکەمبوونی ئەو نەخشە دیاریبکە.

شیکار

أ نەخشەکە، وەك لەڕوونکردنەوەکەیدا دیارە، دووخاڵی شلۆقی هەیە، $(-2, -2)$ و $(1, 2)$.

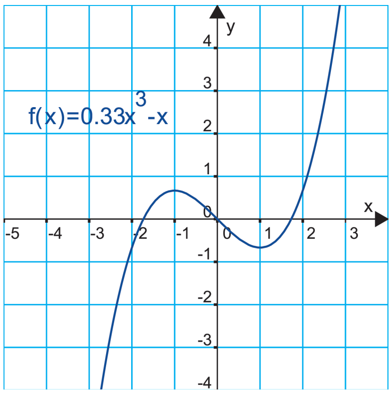
ب نەخشەکە دوو بەهای ئەوپەڕی خۆجێی هەیە، یەکەمیان گەورەترینە لە $(1, 2)$ دا و دووەمیان بچوکترینە لە $(-2, -2)$.

ج بەهای ئەوپەڕی لە $(-2, -2)$ بەهای بچوکترین خۆجێیە و دەکاتە -2 و بەهای x بریتیە لە $x = -2$. و بەهای ئەوپەڕی لە $(1, 2)$ دا بەهای گەورەترین خۆجێیە و دەکاتە 2 و بەهای x بریتیە لە $x = 1$

د نەخشەکە ڕوولەکەمبوونە کاتێك بەهای x لە -2 کەمتر دەبێت یان کاتێك لە 1 گەورەتر دەبێت. بەڵام ڕوولەزیادبوونە کاتێك بەهای x لەنێوان -2 و 1 بێت.

هەوڵبدە

سەرنجی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = 0.33x^3 - x$ بدە کە لە بەرامبەردا دەردەکەوێت.



أ ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی ئەم نەخشەیە چەندە؟

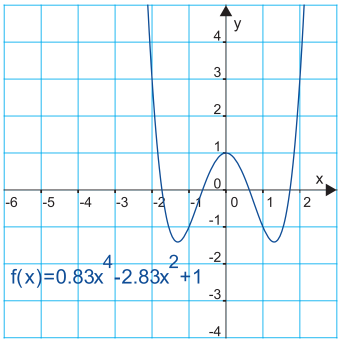
ب ژمارەی بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێی چەندە و جۆرەکانیان دیاربکە.

ج هەموو بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێی بەهای x ـ کانیان بدۆزەوە.

د ماوەکانی ڕوولەزیادبوون و ڕوولەکەمبوون دیاربکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا



1 باسی ئەو نەخشە ڕادەدارە بکە کە ڕوونکردنەوەی لەبەرامبەر دەردەکەوێت.

2 بەهای گەورەترین و بەهای بچوکترین خۆجێی پێناسە بکە.

3 ڕوولەزیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشە لەماوەیەك پێناسە بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **پلەی هەر نەخشەیەکی ڕادەدار بدۆزەوە.**

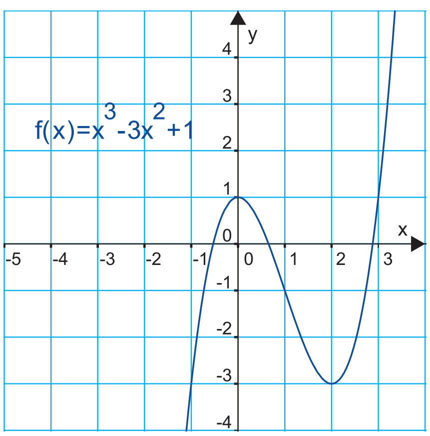
أ $f(x)=4x^3+2x^2-x-1$

ب $g(x)=x^4-3x^3+5x^2-2x-1$

ج $h(x)=6x-4x^4+x^7$

د $k(x)=3x^2+2x^6-4x^4-1$

لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3-3x^2+1$ دەردەکەوێت.



5 ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەکە چەندە؟

6 ژمارەی بەهاکانی ئەوپەڕی خۆجێی چەندە و جۆرەکانیان چییە؟

7 بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێی و بەهای x ـە کانیان بدۆزەوە.

8 ماوەکانی ڕوولەزیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە دیاربکە.

9 نەخشەی $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$ بەکاربهێنە.

أ خشتەی بەرامبەر تەواوبکە.

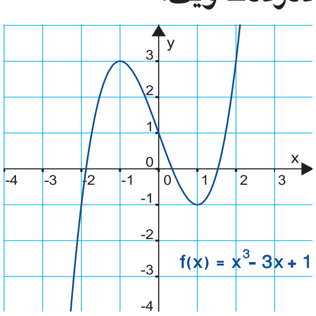
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

ب لەڕووتەختی پۆوتانەکان خاڵەکانی $(x, f(x))$ کە لە خشتەکەدا هاتووە دیاربکە.

ج ئەو خاڵانە بە چەماوەیەکی گونجاو ببەستەوە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3-3x+1$ دەردەکەوێت.



10 ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەکە چەندە؟

11 ژمارەی بەهاکانی ئەوپەڕی خۆجێی چەندە و جۆری هەریەکەیان چییە؟

12 بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێی و بەهای x ـە کانیان بدۆزەوە.

13 ماوەکانی ڕوولە زیادبوون و کەمبوونی نەخشەکە دیاربکە.

ڕوانین بۆ دواوە

14 خشتەی خوارەوە تەواوبکە بە هەژمارکردنی بەهایەکانی نەخشەی $g(x) = x^2 - 2x - 2$.
بچوکترین بەهای نەخشەی g چییە و بەهای x ـەکەی دیاربکە.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$g(x)$									

ڕوانین بۆ پێشەوە

15 لەخشتەی بەرامبەر کاتی پێویست t بە کاتژمێر بۆبڕینی ماوەی 600 کم دەردەکەوێت، بەپێی خێرایی s بە کم لەکاتژمێرێك، خشتەکە تەواوبکە و دەرئەنجامی پەیوەندییەك بکە کە دووگۆڕاوی t و s بەیەکەوە دەبەستێتەوە.

خێرایی	کات	دووری
30	20	600
40		
50		



وانەی 2

نەخشەکانی گۆڕان

Variation Functions

بۆچی؟

دەتوانیت نەخشەی گۆڕان بەکاربهێنیت بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئەو کەسانەی پێویستن بۆ جێبەجێکردنی کارێک وەک دروستکردنی خانوویەک لە کاتێکی دیاریکراودا.

ئامانجەکان

- گۆڕانی ڕاستەوانە دەناسێت و نەگۆڕەکەی دیاریدەکات.
- گۆڕانی پێچەوانە دەناسێت و نەگۆڕەکەی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی گۆڕانی پێچەوانە دەنووسێت.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە گۆڕانی ڕاستەوانە یان پێچەوانە لەخۆدەگرن.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەکانی گۆڕان
Variation functions
گۆڕانی ڕاستەوانە
Direct Variation
نەگۆڕی گۆڕان
Constant of variation
گۆڕانی پێچەوانە
Indirect variation
دەرکەناری ستونی
Vertical asymptote
دەرکەناری ئاسۆیی
Horizontal asymptote

زۆرجار دوو هێند بەپەیوەندییەکی گۆڕان بەیەکەوە دەبەسترێنەوە، گۆڕانی بەهای یەکێکیان گۆڕانی بەهای ئەوی تریان دیاریدەکات. کاتی پێویست بۆ بڕینی دووری نێوان هەولێر و بەغداد بۆ نمونە بەخێرایی ئەو ئۆتۆمبیلە دەبەسترێتەوە کە لە هەولێر بۆ بەغداد دەڕوات. ئەگەر خێرایی زیادبکرێت کاتەکە کەمدەکات و ئەگەر کاتەکە زیادبکرێت خێراییەکە کەمدەکات. بەم جۆرە پەیوەندییانە دەوترێت **نەخشەی گۆڕان**. لەم وانەیەدا دوو جۆر نەخشەی گۆڕان وەردەگرێت: نەخشەی **گۆڕانی ڕاستەوانە** و نەخشەی **گۆڕانی پێچەوانە**.

گۆڕانی ڕاستەوانە

دوو گۆڕاوی x و y بەپەیوەندییەکی ڕاستەوانە بەیەکەوە دەبەسترێنەوە، ئەگەر ڕێژەی یەکێکیان بۆئەوی تریان نەگۆڕ بێت، واتا ئەگەر $\frac{y}{x}=k$ یان $y=kx$ کاتێک $k\neq 0$ ژمارەیەکی ڕاستی دیاریکراوبێت. ئەو دوورییەی کە ئۆتۆمبیلێک دەیبڕێت بە خێرایی نەگۆڕی $110\,\text{km/h}$ دەڕوات ڕاستەوانە دەگۆڕێت بەگۆڕانی کات، ئەگەر کات زیادبکرێت دوورییەکە زیاد دەکات و ئەگەر کاتەکە کەمبکرێت دوورییەکە کەمدەکات.

نەخشەی گۆڕانی ڕاستەوانە

بە نەخشەی $f(x)$ دەوترێت نەخشەی گۆڕانی ڕاستەوانە، ئەگەر ڕێسایەکەی بەشێوەی $f(x)=kx$ بێت،

کاتێک k ژمارەیەکی ڕاستی جگە لە سفر بێت، بە k دەوترێت نەگۆڕی گۆڕان.

نمونە 1

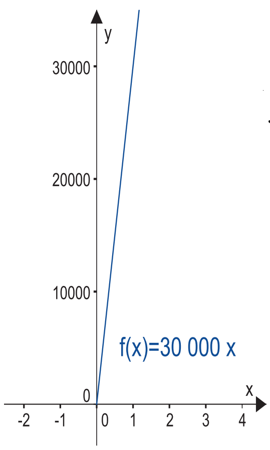
لێخورینی ئۆتۆمبیل یەکێک لە شوفێرەکان خولی تایبەت بۆ لێخورینی ئۆتۆمبێل دەکاتەوە. ئەگەر شۆفێرەکە لە حەفتەی یەکەم 8 کاتژمێر مەشقکردنی هەبوو بەرامبەر 240000 دینار و لە حەفتەی دووەم 11 کاتژمێر مەشقیکرد، ئایا چەند وەردەگرێت ئەگەر بزانیت ئەو بڕە پارەیە ڕاستەوانە دەگۆڕێت بە گۆڕانی ژمارەی کاتژمێرەکان.

شیکار

ئەوەی شوفێرەکە وەریدەگرێت (S) بە ڕاستەوانە دەگۆڕێت بە گۆڕینی ژمارەی کاتژمێرەکان (x) بۆیە نەگۆڕی گۆڕاو k ڕێژەی (S) بۆ (x) دەنوێنێت واتە $k=\frac{S}{x}=\frac{240\,000}{8}=30\,000$ لە پاشاندا $S(x)=30\,000x$ لە حەفتەی دووەم شوفێرەکە بڕی $S(11)=30\,000\times 11=330\,000$ واتە $330\,000$ دینار وەردەگرێت.

نەگۆڕی گۆڕاو لە نموونەی 1دا، چی دەگەیەنێت؟

هەوڵبدە سیروان بڕیاریدا گەشتێك بە دەوری جیهان بە ڕۆیشتنی نەگۆڕ بەپێ بکات لەحەفتەی یەکەم سیروان 6 ڕۆژ ڕۆیشت و 384 کم بڕی، لەهەفتەی دووەم چەند کم بڕی؟ ئەگەر زانیت دوو ڕۆژ پشوویدا.



نەخشەکانی گۆڕانی ڕاستەوانە بارێکی تایبەتییە لە نەخشەی هێڵی وەك دەزانیت کەشێوەی گشتی نەخشەی هێڵی بریتییە لە $f(x)=ax+b$ کاتێك a لارییە و b یەکتربڕینی ستونییە. نەخشەی گۆڕانی ڕاستەوانە بریتییە لە نەخشەی هێڵی، یەکتربڕینە ستوونییەکەی دەکاتە 0 . لەمەش دەردەچێت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕاستەوانە بریتیە لە ڕاستەهێڵێك بەخاڵی بنەڕەتدا دەڕوات.

نموونە 2 ڕوونکردنەوەی نەخشەی نموونەی 1 بکێشە.

شیکار

تەماشای وێنەی بەرامبەر بکە، و تێبینی ئەوە بکە کە نەخشەکە پێناسە نەکراوە کاتێك x بەهای سالب وەردەگرێت، چونکە ئەو گۆڕاوە ژمارەی ئەو کاتژمێرانە دەنوێنێت کە شوفێرەکە مەشقی تێدا هەبووە.

هەوڵبدە ڕوونکردنەوەی نەخشەی هەوڵبدە بکێشە کە لەدوای نموونەی 1 هاتووە.

نەخشەکانی گۆڕانی پێچەوانە

بە نەخشەی $f(x)$ دەوترێت نەخشەی گۆڕانی پێچەوانە، ئەگەر ڕێسایەکەی بەشێوەی

$f(x)=\frac{k}{x}$ یان $xy=k$ بێت

کاتێك k ژمارەی ڕاستی بێت جگەلە 0. بە k دەوترێت نەگۆڕی گۆڕانەکە.

نموونە 3 دار ڕواندن

تیپێکی دێدەوان پەیمانیدا 500 نەمام بچێنێت لە ناوچەیەکی ڕووت. ژمارەی ئەو نەمامانەی هەر تیپێکی دوو کەسی بە 10 نەمام خەملێندراوە لەهەر کاتژمێرێکدا.

أ هەرتیپێك چەند کاتژمێری پێویستە بۆئەوەی کارەکەی جێبەجێبکات.

ب 50 تیپ چەند کاتژمێری پێویستە بۆئەوەی پێکەوە کارەکەیان ئەنجام بدەن.

ج 100 تیپ چەند کاتژمێریان پێویستە.

د نەخشەیەکی گۆڕانی پێچەوانە بنووسە ژمارەی کاتژمێرەکان T کە بۆ x تیپ پێویستە بنووسە، بۆئەوەی پێکەوە کارەکەیان ئەنجام بدەن.

هـ ئەو نەخشە بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی $T(50)$ و $T(100)$ و ئەوانەی دەستتکەوتوون بەراوردیان بکە لەگەڵ هەردوو وەڵامی ب ، جـ.

شیکار

أ $50 = 10 \div 500$ ؛ هەر تیپێك پێویستی بە 50 کاتژمێرە بۆ ئەنجامدانی کارەکە.

ب $10 = 50 \div 500$ ؛ 50 تیپ پێویستی بە 10 کاتژمێرە بۆ ئەنجامدانی کارەکە.

ج $5 = 100 \div 500$؛ 100 تیپ پێویستی بە 5 کاتژمێرە بۆ ئەنجامدانی کارەکە.

د تێبینی بکە کە $50 \times 10 = 500$ و $10 \times 50 = 500$ و $5 \times 100 = 500$ لەو تێبینیە دەردەچێت $T \times x = 500$ یان $T = \frac{500}{x}$. نەخشەی گۆڕانی پێچەوانە بریتیەلە $T(x) = \frac{500}{x}$.

هـ $T(50) = \frac{500}{50} = 10$ و $T(100) = \frac{500}{100} = 5$ ، هەردوو ئەنجامەکە ڕێکن لەگەڵ دوو وەڵامی پرسیاری ب و ج .

هەوڵبدە ئۆتۆمبیلێك بەخێراییەکی نەگۆڕ دەڕوات و ماوەی نێوان هەولێر و بەغداد 450 کم بە 6 کاتژمێر دەبڕێت.

أ خێرایی ئەم ئۆتۆمبیلە چەندبووە؟

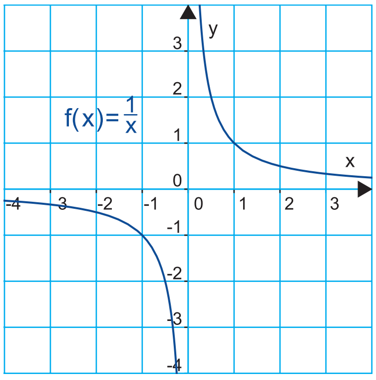
ب خێرایی ئۆتۆمبیلەکە چەند بووە ئەگەر بەخێراییەکی ڕێك ماوەکەی بە 8 کاتژمێر بڕیبێت؟

ج نەخشەیەکی گۆڕانی پێچەوانە بنووسە خێرایی s ئۆتۆبیلەکە دەربخات بەدانانی نەگۆڕە بەپێی کاتی x (بەکاتژمێر) خایەنراو بەگەشتەکەی لە هەولێر بۆ بەغداد.

د خێرایی ئۆتۆمبیلێك چەندبووە کەماوەکەی بە 4 کاتژمێر بڕیوە ئەگەر زانیت خێراییەکەی نەگۆڕبێت.

هەڵگەڕاوەی نەخشە

هەڵگەڕاوەی نەخشە، نەخشەیەکە بە هاوکێشەی $f(x) = \frac{1}{x}$ پێناسەکراوە.



وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی هەڵگەڕاوەی نەخشە دەنوێنێت. ئەگەر بە وردی سەیری ڕوونکردنەوەکە بکەیت تێبینی ئەم خاڵانە دەکەی:

1. دەتوانی بەهایەکانی y بەرامبەر بە بەهایەکانی x هەژماربکەیت کاتێك x هەرچەندبێت جگە لە سفر. بواری هەڵگەڕاوەی نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگە لە سفر.
2. هەر چەند بەهایەکانی x زیادبکات. بەهایەکانی y کەمدەکات ئەمەش ئەوە دەگەیێنێ کە نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە.
3. کاتێك گۆڕاوی x موجەب بێت و بەهایەکانی زیاد دەکات بەهایەکانی y لە سفر نزیکدەبێتەوە و بە موجەب دەمینێتەوە. بەشێوەیەکی تر دەڵێین: y بۆ لای سفری موجەب نزیکدەبێتەوە کاتێك x بەرەو $+\infty$ نزیکدەبێتەوە.
4. لەکاتی گۆڕاوی x سالب بێت و بەهایەکانی کەم دەبێتەوە بەهایەکانی y لە سفر نزیکدەبێتەوە و بە سالب دەمینێتەوە. ئەمە بەم شێوە دەردەبڕێت: y بۆ لای سفری سالب نزیکدەبێتەوە کاتێك x بەرەو$-\infty$ نزیکدەبێتەوە.
5. بەهایەکانی y لەسفر نزیکدەبێتەوە کاتێك بەهایەکانی ڕووتی x ڕوو لە زیادبوون دەبێت زیاتر و زیاتر ئەمە بەم شێوە دەردەبڕێت: ئەو ڕاستەهێڵەی بە هاوکێشەی $y = 0$ دەنوێنرێت، واتە تەوەری x دەبێتە دەرکەناری ئاسۆیی بۆ ڕوونکردنەوەی هەڵگەڕاوەی نەخشەکە.

6. هەرچەند بەهایەکانی سالب بۆ گۆڕاوی x زیادبکات، بەهایەکانی y کەمدەکات و بە سالب دەمینێتەوە واتە: y بۆ لای $-\infty$ نزیکدەبێتەوە کاتێك x لە سفر نزیکدەبێتەوە لە چەپەوە.
7. هەرچەند بەهایەکانی موجەب بۆ گۆڕاوی x کەمدەکات، بەهایەکانی y زیاد دەکات و بە موجەب دەمینێتەوە واتە: y لەلای $+\infty$ نزیکدەبێتەوە کاتێك x بەرەو سفر دەڕوات لە ڕاستەوە.
8. بەهایە رووتەکانی y ڕوو لەزیادبوون دەبێت زیاتر و زیاتر هەرچەند گۆڕوای x بەهایە ڕووتەکانی کەمدەکات زیاتر و زیاتر و بەم شێوەیە دەردەبرین:
ئەو ڕاستەهێڵەی بە هاوکێشەی $x = 0$دەنوێنرێت، واتە تەوەری y دەکاتە دەرکەناری ستونی بۆ ڕوونکردنەوەی هەڵگەڕاوەی نەخشەکە.

نموونە 4 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \frac{-2}{x}$ بکێشە.

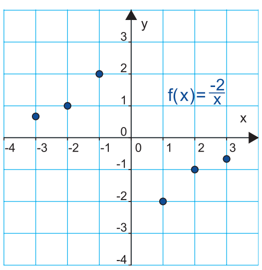
شیکار

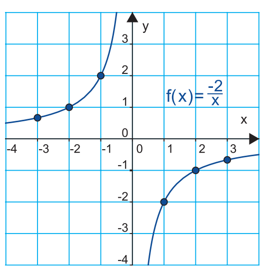
هەنگاوی 1 خشتەی بەهایەکان دروستبکە.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	1	2	-2	-1	$-\frac{2}{3}$

هەنگاوی 2 ئەو خاڵانە دیاریبکە کە خشتەکە دەنوێنن.

هەنگاوی 3 چەماوەیەکی گونجاو بکێشە، ئاگاداربە کە تەوەری x دەرکەناری ئاسۆیی و تەوەری y دەرکەناری ستونی ڕوونکردنەوەکەیە.





هەوڵبدە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \frac{3}{x}$ بکێشە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر خشتەیەکت هەبێت بەهایەکانی گۆڕاوی x و بەهایە بەرامبەرەکانی y تێدابێت، چۆن دەزانیت ئەو خشتەیە پەیوەندییەکی گۆڕانی ڕاستەوانەی نێوان دوو گۆڕاوەکە دەنوێنێت، چۆن نەگۆڕی گۆڕانەکە لەم بارەدا دەدۆزیتەوە.

2 ئەگەر خشتەیەکت هەبێت بەهایەکانی گۆڕاوی x و بەهایە بەرامبەرەکانی y تێدابێت، چۆن دەزانیت ئەو خشتەیە پەیوەندییەکی گۆڕانی پێچەوانەی نێوان دوو گۆڕاوەکە دەنوێنێت، چۆن نەگۆڕی گۆڕاوەکە لەم بارەدا دەنوێنێت.

3 دوو گۆڕاوی x و y بە پەیوەندییەکی گۆڕانی پێچەوانە بەیەکەوە دەبەسترێنەوە. کە $y = 3$ کاتێك $x = 8$. چۆن بەهای y دەدۆزیتەوە کاتێك $x = 2$ باسیبکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 ئەوەی ئازاد وەریدەگرێت بەرامبەر کارەکەی لەکارگەیەك ڕاستەوانە دەگۆڕێت لەگەڵ ژمارەی کاتژمێرەکانی کارەکەی، ئازاد 300000 دیناری حەفتەی یەکەم وەرگرت بەرامبەر 20 کاتژمێر کارکردن.

- **أ** هاوکێشەیەکی نەخشەی ڕاستەوانە بنووسە، پرسیارەکە دەرببڕێت.
- **ب** ئازاد 24 کاتژمێر ئەم حەفتەیە کاریکرد، چەند وەردەگرێت؟
- **ج** ئازاد بڕیاریدا حەفتەی داهاتوو 450000 دینار وەربگرێت، پێویستە چەند کاتژمێر کاربکات؟

5 ئۆتۆمبێلێك بەخێرایی نەگۆڕ لە ڕێگەی خێرا لە سلێمانی بۆ بەسرە (920 کم) دەڕوات. ڤالا ماوەکە بەخێرایی 100 km / h بڕی.

- **أ** هاوکێشەی نەخشەی گۆڕانی پێچەوانە بۆ هەژمارکردنی ماوەی T کە گەشتەکە دەخایێنێت بەپێی s بنووسە.
- **ب** ئازاد هەمان ماوەی بەخێرایی 125 km / h بڕی، گەشتەکەی ئازاد چەندی خایەند؟
- **ج** شێرزاد سلێمانی لە کاتژمێری 8 ی بەیانی بەجێهێشت و دەیەوێ کاتژمێری 7 ئێوارە بگاتە بەسرە لەگەڵ وەستانی کاتژمێرێك بۆ نانخواردن، دەبێ بە چ خێراییەك ئۆتۆمبێلەکە لێبخورێت؟

دیاریبکە ئەگەر خشتەکە پەیوەندی گۆڕانی ڕاستەوانە یان پەیوەندی گۆڕانی پێچەوانە دەنوێنێت یان هیچیان نانوێنێت.

6

x	6	4	1
y	2	3	12

7

x	2	5	9
y	3	6	4

8

x	24	4	12
y	30	5	15

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

9 تیپی شانۆی میللی خۆی ئامادە دەکات بۆ سازدانی شانۆگەریەکی نوێ بە بۆنەی جەژنی نەورۆز بۆ ئەمەش پێویستی بە ئامادەکردنی دیکۆرە کە 3 ڕۆژ دەخایەنێت ئەگەر 20 کرێکار کاری لێبکات.

- **أ** هاوکێشەی نەخشەی گۆڕانی پێچەوانە بۆ هەژمارکردنی ماوەی T کە پێویستە بۆ ئامادەکردنی دیکۆرەکە بنووسە بەپێی ژمارەی کرێکاران x کە کاری لێدەکەن.
- **ب** 12 کرێکار کاردەکەن، چەند ماوە پێویستە بۆ ئامادەکردنی دیکۆرەکە.
- **ج** بەڕێوەبەری شانۆ داوایکرد کە دیکۆرەکە ئامادەبکرێت بە دوو ڕۆژ. دەبێ چەند کرێکار کاربکەن.

دیاریبکە ئەگەر خشتەکە پەیوەندی گۆڕانی ڕاستەوانە یان پەیوەندی گۆڕانی پێچەوانە دەنوێنێت یان هیچیان نانوێنێت.

10

x	8	14	24
y	12	21	36

11

x	5	6.25	10
y	5	4	2.5

12

x	5	7	9
y	3	5	7

13 دەرچووانی زانكۆی دهۆك گەشتێك بۆ عمان ڕێكدەخەن خوێندكارانی زانكۆ بەشداری تێدا دەكەن. نرخی بەشداری كردن لەگەشتەكە بە گۆڕانی ژمارەی بەشداربووان پێچەوانە دەگۆڕێت، نرخی بەشداربوون بۆ خوێندكارێك 250 000 دینار دەبێت ئەگەر ژمارەی بەشداربووان 24 خوێندكار بێت. ژمارەی بەشداربووان پێویستە چەند بێت بۆ ئەوەی نرخی بەشداربوونی یەك خوێندكار ببێتە 200 000 دینار.

ڕوانین بۆ دواوە

پلەی هەر ڕادەدارێك چەندە؟

14 $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 + 1$

15 $g(x) = 2 - 5x + 7x^2 - x^3$

16 $h(x) = -5x^3 - x^4 + 1$

ڕوانین بۆ پێشەوە

17 ژمارەی دانەكانی كۆمەڵێك بەكتریا لەهەر كاتژمێرێك دەبێتە دووئەوەندە، ژمارەی دانەكانی كۆمەڵەكە دوای 5 كاتژمێر دەبێتە چەند ئەگەر بەدوو دانە دەستپێكرد؟

وانەی 3

نەخشە توانییەکان
Exponential Functions



بۆچی؟

ئەو کەسانەی شتە دەگمەنەکان کۆدەکەنەوە دەتوانن نەخشە توانییەکان بەکاربهێنن بۆ دروستکردنی نمونەیەک بەهای شتە کۆکراوەکان بنوێنێت، وەک ئامێرە دەگمەنەکانی مۆسیقا.

یاسای مۆر Mooreلەپیشەسازی بژمێردا بەکاردێت، لە دەقی ئەو یاسایەدا هاتووە، ژمارەی ئەو ترانزستەرانەی لە پێکهاتەکانی بژمێردا هەیە، ساڵانە دوو هێند دەبێتەوە، لەخشتەی خوارەوە ژمارەی ترانزستەرەکان و زیادبوونی لەپێکهاتەکانی بژمێردا لە سەرەتاکانی دروستبوونی ئەم پیشەسازییە دەردەکەوێت.

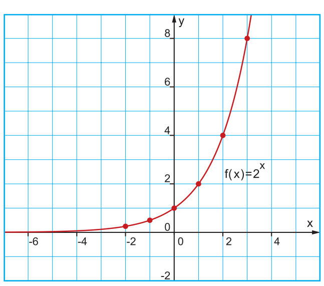
ژمارەی ترانزستەرەکان لەپێکهاتە							
ساڵ	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ژمارە	60	120	240	480	960	1920	3840

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

دەتوانرێت ئەوزیادبوونەی کە ساڵانە دووهێند دەبێتەوە بنوێنرێت بە بەکارهێنانی نەخشەیەک توانەکەی گۆڕاوێك لەخۆبگرێت. ئەم نەخشانە بە **نەخشەی توانی** دەناسرێن سادەترین نەخشەی توانی بریتییەلە نەخشەی $f(x)=b^x$ کاتێك **بنچینە** b ژمارەیەکی نەگۆڕ، و توانەکە گۆڕاوێکی ئازاد بێت.

بنچینە   توان

$$f(x)=b^x \text{ و } b>0,\ b\neq 1$$



لەوێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2^x$ دەردەکەوێت بواری ئەم نەخشەیە بریتییەلە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان مەودایەکەی بریتییەلە ژمارە ڕاستییە موجەبەکان.$\{y/y>0\}$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

سەرنج بدە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە زیاتر و زیاتر لەتەوەری x نزیکدەبێتەوە هەر چەند بەهاکانی x کەمبکات. هەروەها ڕوونکردنەوەکە لە تەوەری x ناکەوێت، بەڵکو لەسەرەوەی تەوەرەکە دەمێنێتەوە، لەبەرئەوەی برِی 2^x بە موجەبی دەمێنێتەوە بەهای x هەر چەندبێت. تەوەری x بریتییەلە دەرکەناری ئاسۆیی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2^x$. **دەرکەنار** ڕاستەهێڵێکە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە زیاتر و زیاتر لێی نزیکدەبێتەوە هەر چەند بەهای x زۆر گەورەتر دەبێت یان زۆر بچوکتر دەبێت.

هەرنەخشەیەك $f(x)=ab^x$، کاتێك $a>0$ و $b>1$ بریتییەلە نەخشەی **گەشەی توانی** بەهایەکەی زیاد دەکات بە زیادبوونی بەهای x. بەڵام ئەگەر $0<b<1$ ئەوا نەخشەی $f(x)=ab^x$ بریتییەلە نەخشەی **گەڕانەوەی توانی** بەهایەکەی کەمدەکات بەزیادبوونی بەهای x.

ئامانجەکان

- برِە توانییەکان بۆ نواندنی بارەکانی گەشە و گەڕانەوە دەنووسێت و هەژماریان دەکات.
- نەخشەکانی گەشەی توانی و گەڕانەوەی توانی دەناسێت.
- نەخشەکانی توانی سروشتی دەناسێت.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی توانی
Exponetial function

بنچینە
Base

دەرکەنار
Asymptote

گەشەی توانی
Exponetial growth

گەڕانەوەی توانی
Exponetial decay

نەخشەی توانی سروشتی
Natural exponetial function

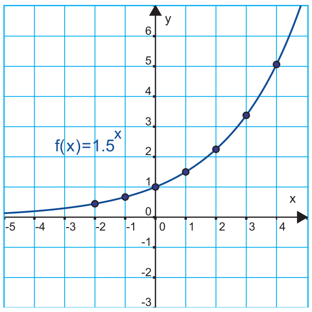
لەبیرت بێت

لە پەیوەندی $y=b^x$، y گۆڕاوی پەیوەستی گۆڕاوی xە، چونکە بەهای y بە بەهای x دیاریدەکرێت.

نمـــونـــه 1 **کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشە توانییەکان**

دیاریبکە کە نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان گەڕانەوەی توانییە، پاشان ڕوونکردنەوەکەی بکێشە

أ $f(x)=1.5^x$



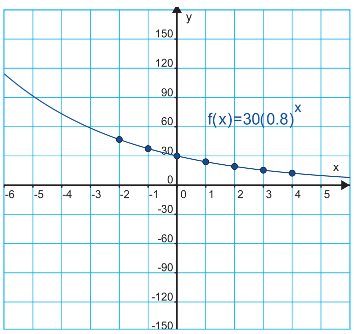
هەنگاوی 1 بەهای بنچینە دیاربکە.

$f(x)=1.5^x$ بنچینە 1.5 لە 1 گەورەترە، نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە.

هەنگاوی 2 ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە بەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.7	1	1.5	2.3	3.4	5.1

ب $f(x)=30(0.8)^x$



هەنگاوی 1 بەهای بنچینە دیاربکە.

$f(x)=30(0.8)^x$ بنچینە 0.8 لە 1 بچوکترە، نەخشەکە نەخشەیەکی گەڕانەوەی توانییە.

هەنگاوی 2 ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە بەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	30	19.2	12.29	7.86	5.03	2.22	2.06

هەوڵبدە **1.** دیاربکە ئایا نەخشەی $f(x)=5(1.2)^x$ نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان گەڕانەوەی توانییە، ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

دەتوانیت گەشە یان گەڕانەوە بە بەکارهێنانی ڕێژەی سەدی ئەو گەشەیە یان ئەو گەڕانەوەیە بنوێنیت. ئەگەر $r\%$ ڕێژەی سەدی گەشە یان گەڕانەوەی هێندێکی دیارکراو لەکاتێکی دیارکراو (ساڵ یان مانگ یان حەفتە یان کاتژمێر. . .) بێت وەك دانانی (ایداع) برە پارەیەك لەبانكێك، ئەوا بەو ڕێسای خوارەوە دەتوانرێت ئەو برە پارەیە پاش t ماوەی کات بدۆزیەوە.

گۆژمەی بنەڕەتی ← a ، ژمارەی ماوە کاتییەکان ← t

$$A(t)=a(1\pm r)^t$$

گۆژمەی کۆتایی ← $A(t)$ ، تێکڕای گۆڕان ← r

بنچینەی ئەو نەخشە توانییەی سەرەوە بریتیە لە $1+r$ لەباری زیادبوونە و پێی دەوترێت **هاوکۆلکەی گەشە** و $1-r$ لەباری کەمبوونە و پێی دەوترێت **هاوکۆلکەی گەڕانەوە**.

نموونە 2 **جێبەجێکردن لە ئابووری**

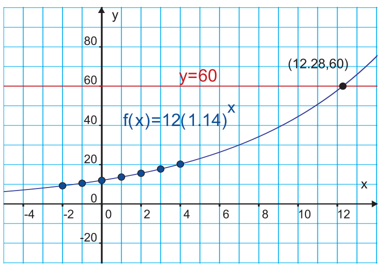
لە ساڵی 2000 گۆڤەند گیتارێکی دەگمەنی کڕی بە 12 ملیۆن دینار، کە مێژووەکەی بۆ ساڵی 1959 دەگەڕێتەوە. شارەزایان وایان خەمڵاند کە نرخی گیتارەکە بەتێکڕایی 14% ساڵانە زیاددەکات. بەڕوونکردنەوەیی ئەو ساڵە بدۆزەوە کە نرخەکەی تێیدا دەبێتە 60 ملیۆن دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە کە نموونەیەك بۆ گۆڕانی نرخی گیتارەکە پێکدەهێنێت.

$f(t)=a(1+r)^t$ نەخشەی گەشەی توانی

$=12(1+0.14)^t$ لەجیاتی a بەهایەکەی 12 و لەجیاتی r بەهایەکەی 0.14 دابنێ.

$=12(1.14)^t$



هەنگاوی 2 ئەو خاڵانە دیاربکە کە خشتەکە دەنوێنیت، پاشان چەماوەیەکی گونجاو بکێشە بەو خاڵانەدا بڕوات.

x	−8	−4	0	2	4	8
$f(x)$	4.21	7.1	12	15.6	20.27	34.23

هەنگاوی 3 ڕاستەهێڵی $y=60$ بکێشە و پۆتانی x بۆ خاڵی یەکتربڕینی لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بخەمڵێنە. لە ڕوونکردنەوەکە دەردەکەوێت کە پۆتانی x بۆ خاڵی یەکتربڕین دەکەوێتە نێوان 12-13 . واتا نرخی گیتارەکە دەبێتە 60 ملیۆن دینار لەساڵی سێزدەم دوای کڕینی، واتا لە ساڵی 2013.

هەوڵبدە ژمارەی نەهەنگە کوورەکانی ئوسترالیا 350 نەهەنگ بوو لە ساڵی 1981 و ژمارەکەی ساڵانە بە تێکڕای 12% زیاد دەکات. نەخشەیەکی توانی بنووسە کە نموونەیەکی ئەو زیادبوونە پێکدەهێنێت، پاشان ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشە بکێشە و بەکاریبهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی کە ژمارەی نەهەنگەکان دەبێتە 1500 نەهەنگ.

نموونە 3 **جێبەجێکردن لەسەر دابەزینی نرخ**

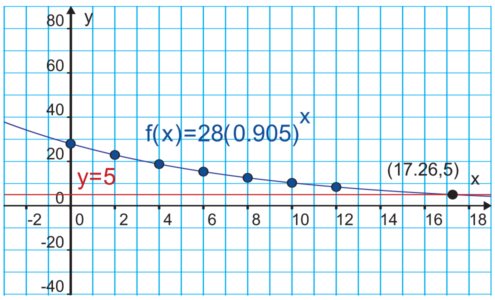
نرخی بارهەڵگرێکی نوێ 28 ملیۆن دینارە، ساڵانە بەتێکڕای 9.5% کەمدەکات. نەخشەیەکی توانی بنووسە نموونەیەکی ئەم کەمبوونە پێکبهێنێت. پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە و بەکاریبهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەبێتە 5 ملیۆن دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە کە نموونەیەك بۆ گۆڕانی نرخی بارهەڵگرەکە پێکدەهێنێت.

$f(t)=a(1-r)^t$ نەخشەی گەڕانەوەی توانی

$=28(1-0.095)^t$ 28 لەجیاتی a و 0.095 لەجیاتی r دابنێ.

$=28(0.905)^t$



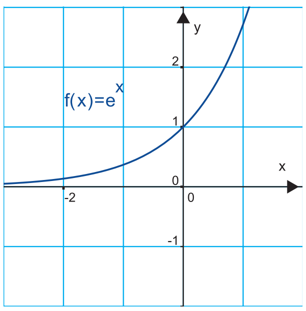
هەنگاوی 2 ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	28	22.93	18.78	15.38	12.6	10.32	8.45

ئەو خاڵانە دیاربکە کەخشتەکە دەنوێنن و چەماوەیەکی گونجاو بکێشە بەو خاڵانەدا بڕوات.

هەنگاوی 3 ڕاستەهێڵی $y = 5$ بکێشە و پۆوتانی خاڵی یەکتربڕینی لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بخەمڵێنە. لەوێنە ڕوونکردنەوەییەکە دەردەکەوێت کە پۆتانی x بۆ خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەکەوێتە نێوان 17 و 18 ، واتا نرخی بارهەڵگرەکە دەبێتە 5 ملیۆن دینار لە ساڵی هەژدەمین دوای کڕینی.

هەوڵبدە ماتۆرسکیلێك نرخەکەی یەك ملیۆن دینارە و نرخەکەی ساڵانە بەتێکڕای 15%کەمدەکات، نەخشەیەکی توانی بنووسە کە نمونەیەکی ئەو کەمبوونە پێکدەهێنێت، پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخەکەی دەبێتە 100 هەزار دینار.



جۆرێکی دیاریکراو لە نەخشە توانییەکان هەیە کە ڕۆڵێکی گرنگ لە جێبەجێکردنە ئابووری و کۆمەڵایەتییەکان و داراییەکان دەبینێت. ئەویش ئەو نەخشە توانییانەیە کە بنچینەکەیان ژمارەی نیپەرە $Neper$ کە بە e هێما دەکرێت ژمارەیەکی نارێژەییە وەك π و بەهایەکەی

$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4....$

ئەو نەخشە توانییانەی بنچینەکەی e بێت، پێی دەوترێت **نەخشە توانییە سروشتییەکان**. نەخشەی توانی سروشتی هەموو سیفەتەکانی نەخشەی توانی هەیە.

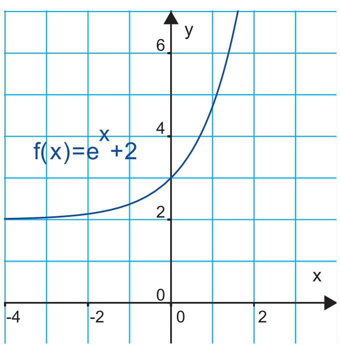
نمـــونــــە 4 **کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی سروشتی**

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = e^x + 2$ بکێشە.

شیکار

خشتەی بەهایەکانی ئەم نەخشە دروستبکە، لەبەرئەوەی ژمارە e ژمارەیەکی نارێژەییە. دەتوانیت بەهای نەخشەکە بۆ دەیەك نزیکبکەیتەوە.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=e^x+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1



هەوڵبدە **4.** ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = e^x - 3$ بکێشە.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 نەخشەیەکی توانی بنچینەکەی دەکەوێتە نێوان 0 و 1 ، ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان گەڕانەوەی توانییە؟

2 نەخشەی توانی $f(x) = 25 \times 2^x$ گەشەی کۆمەڵێك بەکتریا دەنوێنێت، ژمارە 25 چی دەنوێنێت؟ ژمارە 2 چی دەنوێنێت؟

3 نەخشەی توانی $f(x) = 25 \times 2^x$ گەشەی کۆمەڵێك بەکتریا دەنوێنێت. ڕێژەی سەدی گەشەی ئەو کۆمەڵە چەندە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

دیاریبکە ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان گەڕانەوەی توانییە. یان هیچکامیان نییە

4 $f(x) = 32(0.5)^x$

5 $f(x) = 0.5(1.2)^x$

6 $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

8 $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$

9 $f(x)=10(2.7)^x$

10 $f(x)=2(10)^x$

11 $f(x)=0^x$

12 $f(x)=1(0.5)^x$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

13 **بژمێر** نرخی بژمێرەکان ساڵانە بەتێکڕایی 30% کەمدەکات، کاوە بژمێرێکی پێشکەوتووی کڕی بە 000 765 2 دینار، ژمارەی ئەو ساڵانەی پێویستە بخەمڵێنە بۆئەوەی نرخی ئەو بژمێرە لە 000 350 دینار کەمتر بێت؟

14 **بانکەکان** بانکەکان یاسایەك بۆ هەژمارکردنی بەهای هەنووکەیی بۆ گوژمەیەکی دانراو بەکاردەهێنن $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتێك A گوژمەی هەنوکەیی و P گوژمەی بنەڕەتی دانراو و r تێکڕای سوودی ساڵانەیە و t ماوەیە بە ساڵ و n ژمارەی ماوەکانە لە ساڵێك کە پارەکە لە پاشەکەوت هەژماردەکرێت واتە هەژمارکردنی سوودەکە و دانانی سەر گوژمەی دانراو (المودع). سروور 5 ملیۆن دینار بە تێکڕایی سوودی ساڵانە 5% بە پاشەکەوتی وەرزی (4 جار لە ساڵێك) دانا.

أ بەهای گوژمەکە دەبێتە چەند پاش 5 ساڵ.

ب کەی گوژمە دانراوەکە 10 ملیۆن دینار تێپەڕ دەبێت.

ج **ئەگەر هاتوو** سروور چەند قازانج دەکات پاش 5 ساڵ ئەگەر هاتوو پاشەکەوت بە مانگانەبێت نەك وەرزانە؟

15 **خەملاندن** ژمارەی دانیشتوانی سەر زەوی ساڵی 2000 بە 6.1 ملیار کەس، هەروەها تێکڕایی زیادبوونیان ساڵانە بە 1.4% خەملێنرا. ژمارەی دانیشتوانی سەر زەوی لە ساڵی 2020 بخەملێنە. نەخشەیەك بنووسە زیادبوونی دانیشتوانی سەر زەوی بەپێی ساڵ لە پاش ساڵی 2000 (2000 = ساڵی 0) بنوێنێت. و بەکاری بهێنە بۆ بەراوردکردنی خەملاندنەکەی پێشووت لەگەڵ ئەوەی هەژمارت کرد بە بەکارهێنانی نەخشەکە.

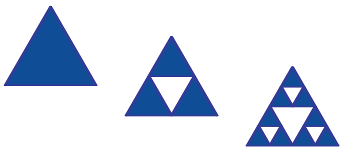
ڕوانین بۆ دواوە

16 ئەم سیستەمە هێڵییە شیکاربکە.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=-1 \end{cases}$$

ڕوانین بۆ پێشەوە

17 سێگۆشەی سیربنسکی شێوەیەکە بە دەستت دەکەوێت لە سێگۆشەیەکی ڕێك (یەك لا) بە وەرگرتنی سێگۆشەیەکی ڕێك لە ناوەڕاستی سێگۆشەی یەکەم. وە ئەم کارە دووبارە دەبێتەوە لەهەر سێگۆشەیەك بە دەستت دەکەوێت. ژمارەی سێگۆشەکان لە قۆناغی پێنجەم دەبێتە چەند؟



وانەی 4

نەخشە لۆگاریتمییەکان

Logarithmic Functions



بۆچی؟

لۆگاریتمەکان بۆ پێوانی ترشی ئاو بەکاردێت

ئامانجەکان

- شێوەی هاوتاکانی نەخشەی توانی و لۆگاریتمی دەنووسێت.
- نەخشەی لۆگاریتمی دەنووسێت و ڕوونکردنەوەکەی دەکێشێت و بەهایەکەی هەژماردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

لۆگاریتم Logarithm

لۆگاریتمی ئاسایی
Common logarithm

لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm

نەخشەی لۆگاریتمی
Logarithmic function

چەندجار دینارێك دوو ئەوەندە دەکەیت بۆئەوەی ببێتە 8 دینار؟ دەتوانیت هاوکێشەی $8 = 1\times(2)^x$ بەکاربهێنیت بۆ نواندنی ئەمکارە. لەوانەیە بتوانیت ئەم هاوکێشە بەهزری شیکاربکەیت ئەگەر بێتەبیرت $2^3 = 8$ ، پێویستە دینارێك 3 جار دووئەوەندە بکەیت بۆئەوەی 8 دینارت دەستبکەوێت.

چەندجار دینارێك دووئەوەندە دەکەیت بۆئەوەی ببێتە 512 دینار؟ دەتوانیت ئەو پرسیارە شیکاربکەیت ئەگەر بتوانیت هاوکێشەی $2^x = 512$ شیکاربکەیت. بە بەکارهێنانی کرداری پێچەوانەی بەرزکردنەوەی ژمارەیەك بۆ هێزێك بەتوانێکی دیاریکراو. ئەو کردارە پێچەوانە بریتییە لە هەژمارکردنی لۆگاریتم. **لۆگاریتم** بریتییە لە توانی ئەو هێزەی کە ژمارەیەك (بنچینەیەك)ی دیاریکراو بۆی بەرزدەکرێتەوە بۆئەوەی بەهای دراوت دەستکەوێت.

دەتوانیت هاوکێشەی توانی بەشێوەی هاوکێشەی لۆگاریتمی بنووسیت و بەپێچەوانەوە.

هاوکێشەی توانی **هاوکێشەی لۆگاریتمی**

$$b^x = a \quad \longleftrightarrow \quad \log_b a = x$$

$$b > 0, b \neq 1$$

نموونە 1 گۆڕین لەشێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکی توانی بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

	هاوکێشەی توانی	شێوەی لۆگاریتمی	
أ	$2^6 = 64$	$\log_2 64 = 6$	بنچینەی توانی دەبێتە بنچینەی لۆگاریتم.
ب	$4^1 = 4$	$\log_4 4 = 1$	توانی هێز بریتییە لە لۆگاریتم.
ج	$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$	هێزی هەر ژمارەیەك جگەلە سفر بەتوانی سفر دەکاتە 1
د	$5^{-2} = 0.04$	$\log_5 0.04 = -2$	لەوانەیە توان یان لۆگاریتم سالب بێت.
ھ	$3^x = 81$	$\log_3 81 = x$	لەوانەیە لۆگاریتم یان توان گۆڕاو بێت.

هەوڵبدە هاوکێشە توانییەکە بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

أ $9^2 = 81$ ب $3^3 = 27$ ج $x^0 = 1 (x \neq 0)$

نموونە 2 گۆڕین لەشێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوەی توانی

هاوکێشەی لۆگاریتمییەکان بەشێوەی توانی بنووسە.

	هاوکێشەی لۆگاریتمی	شێوەی توانی	
أ	$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$	بنچینەی لۆگاریتم دەبێتە بنچینەی توان.
ب	$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$	لۆگاریتم بریتییە لە توانی هێز.
ج	$\log_8 0.125 = -1$	$8^{-1} = 0.125$	لەوانەیە ئەنجامی لۆگاریتم سالب بێت.
د	$\log_5 5 = 1$	$5^1 = 5$	
ھ	$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$	

هەوڵبدە هاوکێشە لۆگاریتمییەکان بەشێوەی توانی بنووسە.

أ $\log_{10} 10 = 1$ ب $\log_{12} 144 = 2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

لۆگاریتم توانە، کەواتە دەتوانین یاسایەکانی هێز لە لۆگاریتمەکان جێبەجێبکەین. لەوانەیە سەرنجی ئەو سیفەتانەت لەدوا نموونە دابێت.

هەندێك سیفەتی لۆگاریتم		
b هەر بنچینەیەك بێت و $b > 0$ و $b \neq 1$.		
شێوەی لۆگاریتمی	**شێوەی توانی**	**نموونە**
لۆگاریتمی b بەبنچینەی b $\log_b b = 1$	$b^1 = b$	$\log_{10} 10 = 1$ $10^1 = 10$
لۆگاریتمی 1 $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$

لۆگاریتمی ئاسایی لۆگاریتمی بنچینە 10 . ئەگەر بنچینەی لۆگاریتم دیارینەکرابێت ئەوا 10 یە. نموونە: $\log 5 = \log_{10} 5$

نموونە 3 هەژمارکردنی بەهای لۆگاریتم بەهزری

بەهایەکان بە هزری هەژماربکە.

أ $\log 1000$

$10^? = 1000$

$10^3 = 1000$

$\log 1000 = 3$

ب $\log_4 \frac{1}{4}$

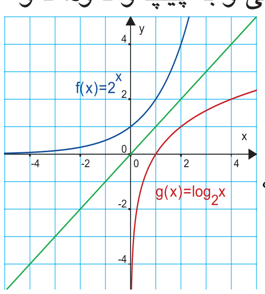
$4^? = \frac{1}{4}$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

$\log_4 \frac{1}{4} = -1$

هەوڵبدە بەهزری بەهای بڕەکە هەژماربکە.

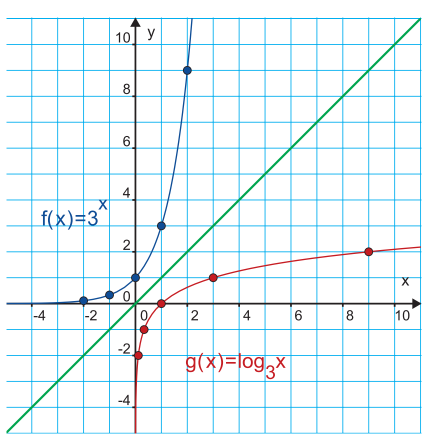
أ $\log 0.00001$ ب $\log_{25} 0.04$



لەبەرئەوەی دەتوانین نووسینی شێوەی توانی بگۆڕین بۆ شێوەی لۆگاریتمی و بە پێچەوانەوە، ئەوا هەموو نەخشەیەکی توانی $f(x)$ نەخشەیەکی نوێی $g(x)$ ی لێ پەیدا دەبێت کە بەشێوەی لۆگاریتمی دەنووسرێت و پێی دەوترێت **نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە**. ئەگەر $f(x)=b^x$ ، ئەوا $g(x)=\log_b x$ بواری نەخشەی $g(x)$ بریتییە لە مەودای نەخشەی $f(x)$ و مەودای نەخشەی $g(x)$ بریتیەلە بواری نەخشەی $f(x)$. لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە $g(x)=\log_2 x$ و ڕاستەهێڵی $y=x$ دەردەکەوێت. سەرنجبدە کە دوو ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی و نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە هاوجێن بەپێی ڕاستەهێڵەکە.

نموونە 4 وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی

بەها دراوەکانی گۆڕاوی x بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربهێنە، پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە بکێشە بوار و مەودای نەخشە لۆگاریتمییەکە دیاریبکە.



أ $f(x)=3^x$ ؛ $x=-2,-1,0,1,2$

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=3^x$ بە بەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

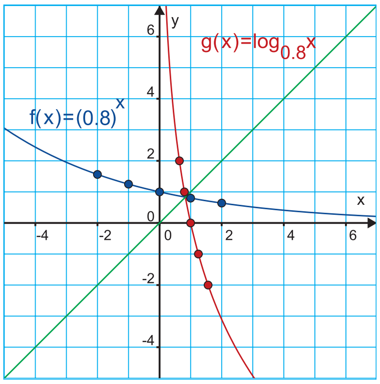
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆئەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی $g(x)=\log_3 x$ بکێشیت x و $f(x)$ لەخشتەی سەرەوە جێگۆڕکێ بکە.

$g(x)=\log_3 x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-2	-1	0	1	2

بواری نەخشەی لۆگاریتمی g بریتییەلە $\{x | x>0\}$ و مەودایەکەی R .

ب $f(x)=(0.8)^x$ ؛ $x=-3,0,1,4,7$



ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = (0.8)^x$ بە بەکارهێنانی خشتەی بەهاکان بکێشە.

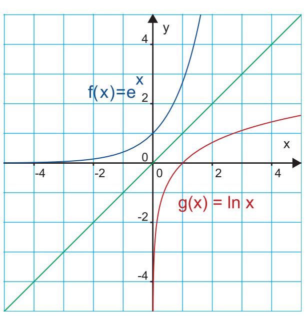
x	−3	0	1	4	7
$f(x) = (0.8)^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

بۆئەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی $g(x)=\log_{0.8} x$ بکێشیت، x و $f(x)$ لەخشتەی سەرەوە جێگۆڕکێ بکە.

$g(x)=\log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
x	−3	0	1	4	7

بواری نەخشەی لۆگاریتمی $g(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداییەکەی R .

هەوڵبدە بەهاییەکانی $x=-2,-1,1,2,3$ بەکاربهێنە بۆکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$، پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە بکێشە، بوار و مەودای نەخشە لۆگاریتمییەکە دیاربکە.



لۆگاریتمی سروشتی بریتییەلە لۆگاریتم بە بنچینە e . هێمای ln بۆ لۆگاریتمی سروشتی بەکاردەهێنیت. ئەو لۆگاریتمە هەمان سیفەتەکانی لۆگاریتمی ئاسایی (دەیی) و لۆگاریتمەکانی دیکەی هەیە.

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی $f(x)=\ln x$ بریتییەلە نەخشەی لۆگاریتمی بەرامبەر نەخشەی توانی سروشتییە. بریتیەلە نەخشەی لۆگاریتمی بە بنچینە e . بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکانە و مەوداییەکەی کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە ڕوونکردنەوەکەشی لە بەرامبەردا دەردەکەوێت.

نموونــــه 5

سادەکردنی برە توانی و لۆگاریتمە سروشتییەکان

برەکە بەسادەترین شێوە بنووسە.

أ $\ln e^{-2t}$ ب $e^{\ln(x-1)}$ ج $e^{5\ln x}$

شیکار

$\ln e^{-2t} = -2t$ $e^{\ln(x-1)} = x-1$ $e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$

هەوڵبدە برەکە بەسادەترین شێوە بنووسە.

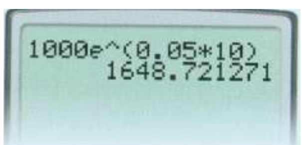
أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$

بەگەڕانەوە بۆ سوودی ئاوێتە. یاسایەکە دەبێتە $A = pe^{rt}$ کاتێك پاشەکەوت بەردەوام دەبێت.

نموونــــه 6

جێبەجێکردن لەئابووریدا

یەك ملیۆن دینار بۆ ماوەی 10 ساڵ بەسوودێك ڕێژەی ساڵانەکەی 5% بوو دانرا، کە پاشەکەوتکردنەکە بەشێوەی حساب بەردەوام بێت. حسابەکە پاش 10 ساڵ دەبێتە چەند؟



$A = pe^{rt}$ یاسایەکە

$A = 1000\ 000\ e^{0.05\times 10}$ لەجیاتی دابنێ

$A \approx 1\ 648\ 720$ بژمێر بەکاربهێنە

حسابەکە پاش 10 ساڵ و بەنزیکەیی دەبێتە 720 648 1 دینار.

هەوڵبدە 000 100 دینار پاش 8 ساڵ دەبێتە چەند، ئەگەر ئەو برە پارە لەحسابی بەردەوامی پاشەکەوت دانرا، بە سوودی ساڵانە ڕێژەکەی 3.5% بێت؟

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. ئەگەر زانیت $\log_{10} 5 = 0.6990$ ، ڕوونبیکەوە چۆن $\log_{10} 0.005$ و $\log_{10} 500$ هەژماردەکەیت.

2. جیاوازی نێوان نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی و نەخشەی لۆگاریتمی ئاسایی بکە.

3. بەهای نەخشەی لۆگاریتمی لە $x = 1$ چەندە؟ ئەمە دەرئەنجام بکە، ڕوونکردنەوەی هەموو نەخشە لۆگاریتییەکان بەخاڵێکی دیاریکراودا دەڕوات، ئەو خاڵە دیارییکە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشە توانییەکە بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

4 $2.4^0 = 1$ **5** $4^{1.5} = 8$ **6** $10^{-2} = 0.01$ **7** $3^x = 243$

هاوکێشە لۆگاریتمییەکە بەشێوەی توانی بنووسە.

8 $\log_4 0.0625 = -2$ **9** $\log_x(-16) = 3$ **10** $\log_{0.9} 0.81 = 2$ **11** $\log_6 x = 3$

ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە بەکارهێنانی بەها دراوەکان بکێشە، پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە بکێشە. بوار و مەودای نەخشە لۆگاریتمییەکە دیاریبکە.

12 $f(x) = 5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 1.5$ **13** $f(x) = 3^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هاوکێشەی توانی بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

14 $x^{2.5} = 32$ **15** $6^x = 216$ **16** $1.2^0 = 1$ **17** $4^{-1} = 0.25$

هاوکێشەی لۆگاریتمی بەشێوەی توانی بنووسە.

18 $\log_5 625 = 4$ **19** $\log_2 x = 6$ **20** $\log_{4.5} 1 = 0$ **21** $\log_\pi \pi = 1$

ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە بەکارهێنانی بەها دراوەکان بکێشە، پاشان ڕوونکردنەوەی نەخشە لۆگاریتمییە پێچەوانەکە بکێشە بوار و مەودای نەخشە لۆگاریتمییەکە دیاریبکە.

22 $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ **23** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

24 **خەملاندن** $\log 2 \simeq 0.30$ بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی $\log 200$ و $\log 2000$.

25 کام لەمانە بریتییەلە شێوەی لۆگاریتمی $2^7 = 128$ ؟

(أ) $\log_2 128 = 7$ (ج) $\log_2 7 = 128$

(ب) $\log_7 2 = 128$ (د) $\log_7 128 = 2$

ڕوانین بۆ دواوە

26 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ بدۆزەوە؟

27 هاوکۆلکەی گەشەی گوژمەی سپێردراو بەسوودێك ڕێژەکەی 7.3% بێت چییە؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

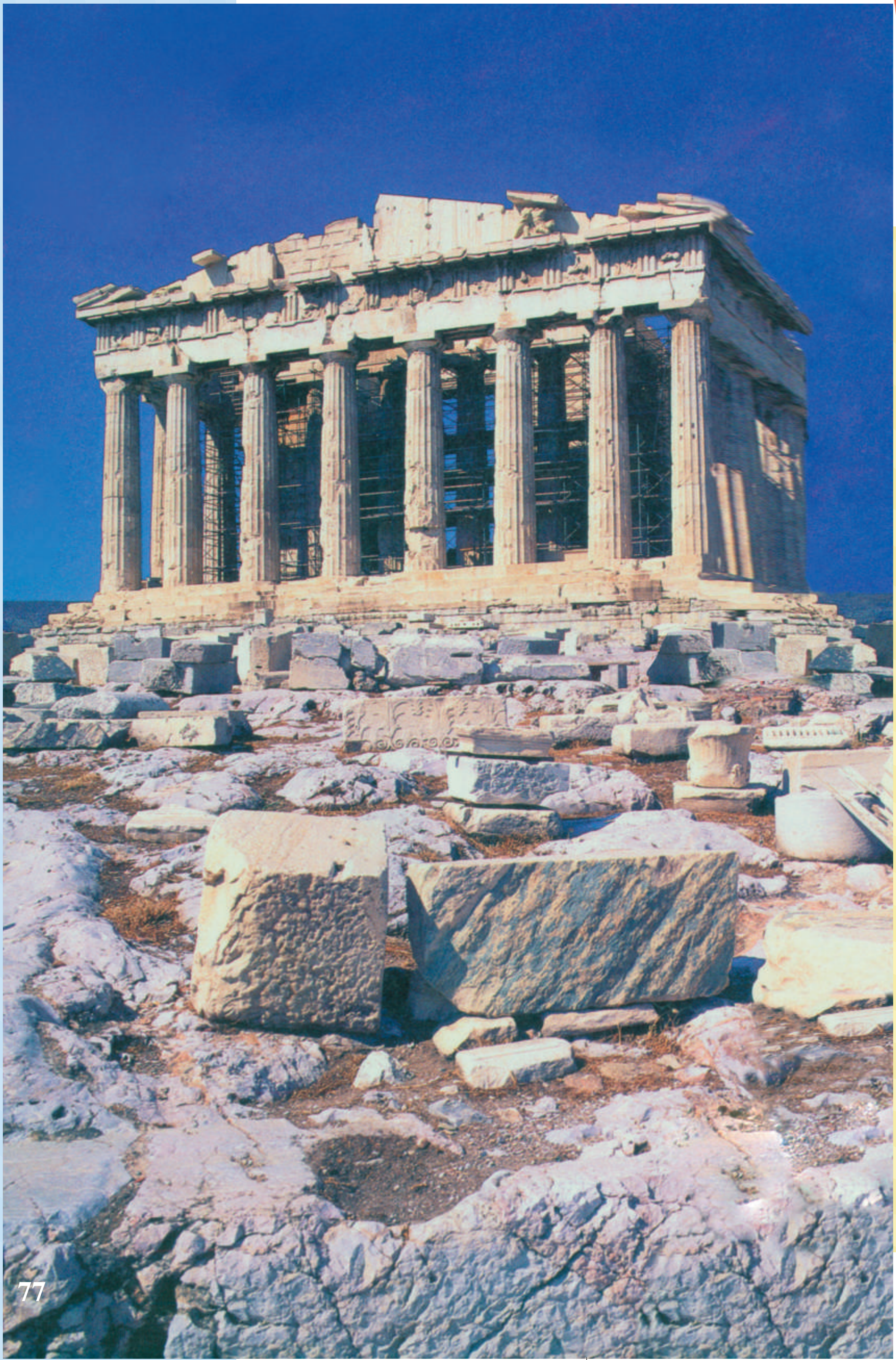
28 سەرنجی ئەو ژمارانە بدە لە چەپەوە بۆ ڕاست لێی بکۆڵەوە:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

چۆن لەژمارەیەك دەچیت بۆ ژمارەیەکی تر بۆلای ڕاست بەدەستپێکردن لەژمارە 2 ؟
ژمارەی دوای ژمارە 21 چەندە؟

یەکبەدوای یەکەکان
Sequences

بەشی
4



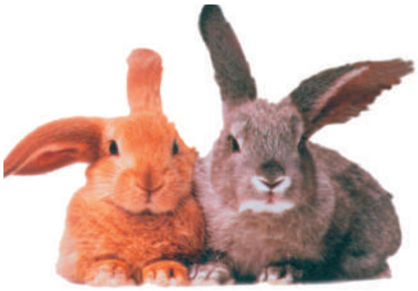
وانەکان

1. یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان
2. یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

وانەی 1

یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان

Arithmetic Sequences



بۆچی؟

یەکبەدوای یەکەکان بۆ دروستکردنی نموونەکان بەکاردێن بە مەبەستی لێکۆڵینەوە لە دیاردە سروشتیەکانی وەک گۆڕانی ژمارەی کۆمەڵەی کەروێشکەکان بە تێپەڕبوونی کات.

ژوان ئۆتۆمبیلێکی نوێی بە 000 750 17 دینار کڕی، بەڕێوەبەرایەتی باجی دەرامەت نرخی ئۆتۆمبیلەکەی ساڵ دوای ساڵ بەم شێوەیە دەخەمڵێنێت:

ساڵ	1	2	3	4
نرخ	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000

ئەو ژمارانە یەکبەدوای یەک پێکدەهێنن، هەر ژمارەیەك لەو ژمارانە **رادەیەکە** لە رادەکانی یەکبەدوای یەکەکە، لەوانەیە یەکبەدوای یەکەکە ژمارەیەکی دیارینەکراو رادەی هەبێت و پێی دەوترێت **یەکبەدوای یەکی دوانەهاتوو**، یان لەوانەیە ژمارەیەکی دیاریکراو رادەی هەبێت، لەم بارەدا پێیدەوترێت **یەکبەدوای یەکی دواهاتوو** وەك یەکبەدوای یەکی پێشوو. دەتوانیت یەکبەدوای یەك وەك نەخشەیەك سەیر بکەیت، بوارەکەی لە ژمارە تەواوە موجەبەکان پێکدێت و مەوداکەی کۆمەڵەی ئەو ژمارانەیە کە رادەکانی پێکدەهێنن.

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن لەجیاتی نووسینی نەخشەی $a(n)$ بۆ رادەکانی یەکبەدوای یەك، بەکاردەهێنن a_n بەژمارەی n دەوترێت خانەی رادەی a_n رادەی یەکەم بریتییە لە a_1 و رادەی دووەم بریتیەلە a_2 . . . بەڵام ئەو رادەی خانەکەی n ـە بریتیەلە a_n و پێی دەوترێت **رادەی نونی** n ی یەکبەدوای یەکەکە.

دوو جۆر یەکبەدوای یەك هەیە گرنگی تایبەتییان هەیە، یەکبەدوای یەکی جۆری یەکەم بەوە دەناسرێتەوە کە جیاوازی هەر رادەیەك و رادەکەی پێش خۆی بەهایەکی نەگۆڕە و پێیدەوترێت یەکبەدوای یەکی ژمارەیی. بەڵام یەکبەدوای یەکی جۆری دووەم بەوە دەناسرێتەوە کە رێژەی هەر رادەیەك بۆ رادەکەی پێش خۆی بەهایەکی نەگۆڕە و پێیدەوترێت یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی لەم وانەیەدا یەکبەدوای یەکی ژمارەیی و لە وانەی داهاتوو یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی فێردەبیت.

ئەگەر بگەڕێیتەوە بۆئەو یەکبەدوای یەکەی لەسەرەتای وانەکەدا هاتووە، جیاوازی نێوان رادەکان بریتییە لە:

$$16\,250\,000 - 17\,750\,000 = -1\,500\,000$$

$$14\,750\,000 - 16\,250\,000 = -1\,500\,000$$

$$13\,250\,000 - 14\,750\,000 = -1\,500\,000$$

بەمەش دەردەکەوێت یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە.

بەهای نەگۆڕی جیاوازییەکانی نێوان رادەکانی یەکبەدوای یەکەکە پێی دەوترێت **بنچینە** Common difference بنچینەی یەکبەدوای یەکەکەی رابردوو دەکاتە (000 500 1)

رادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بەها	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000

−1500 000   −1500 000   −1500 000

ئامانجەکان

- رادەی داواکراو لە یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی دەدۆزێتەوە.
- سەرجەمی بەشە کۆمەڵەکان بۆ یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دەدۆزێتەوە.

زاراوەکان
Vocabulary

یەکبەدوای یەك
Sequence

رادەی یەکبەدوای یەك
Term of a sequence

یەکبەدوای یەکی دوانەهاتوو
Infinite sequence

یەکبەدوای یەکی دواهاتوو
Finite sequence

یەکبەدوای یەکی ژمارەیی
Arithmetic sequence

نموونە 1

جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان

دیارییبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە، بنچینە و ڕادەی دوای ڕادەی کۆتایی دراو بدۆزەوە. **–3, 2, 7, 12, 17, ...**

أ

ڕادەکان	17	12	7	2	-3
جیاوازییەکان	5	5	5	5	

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە، بنچینەکەی دەکاتە 5 ، ڕادەی دوای ڕادەی کۆتایی دراو بریتییە لە $17 + 5 = 22$.

ب **–4, –12, –24, –40, –60, ...**

ڕادەکان	–60	–40	–24	–12	–4
جیاوازییەکان	–20	–16	–12	-8	

یەکبەوردای یەکەکە ژمارەیی نییە، چونکە جیاوازی نێوان ڕادەکان لەگەڵ ڕادەکەی پێش خۆی نەگۆڕ نییە.

هەوڵبدە دیارییبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە بنچینەکە و ئەو ڕادەی دوای ڕادەی کۆتایی دراو بدۆزەوە.

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, \ldots$

ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \ldots$

شێوازی خشتەی بەرامبەر بپشکنە. هەر ڕادەیەك دەکاتە سەرجەمی ڕادەی یەکەم و یەکێك لەچەند جارەکانی بنچینەکە.

ڕادەی دووەم = ڕادەی یەکەم + بنچینە

ڕادەی سێیەم = ڕادەی یەکەم + 2 × بنچینە و

هەروەها . . .

دەتوانیت گشتاندنی ئەم شێوازە بکەیت بەم یاسایە:

بەهای ئۆتۆمبیلەکە ساڵ دوای ساڵ

n	a_n
1	$a_1 = 17\,750\,000 + 0 \times (-1500\,000)$
2	$a_2 = 17\,750\,000 + 1 \times (-1500\,000)$
3	$a_3 = 17\,750\,000 + 2 \times (-1500\,000)$
4	$a_4 = 17\,750\,000 + 3 \times (-1500\,000)$
5	$a_5 = 17\,750\,000 + 4 \times (-1500\,000)$

یاسای گشتی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی نونی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بەم یاسایە هەژماردەکرێت

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و d بنچینەکەی بێت.

نموونە 2

هەژمارکردنی ڕادەی نونی یەك بەدوای یەکێکی ژمارەیی

ڕادەی دەیەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی ... **32, 25, 18, 11, 4,** بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 بنچینەی یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە $d = 25 - 32 = -7$.

هەنگاوی 2 ڕادەی دەیەم بە بەکارهێنانی یاسایەکە هەژماربکە.

یاسا	$a_n = a_1 + (n-1)d$
لەجیاتی دابنێ	$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$
سادەبکە	$= -31$

ڕادەی دەیەمی ئەم یەکبەدوای یەکە دەکاتە -31 .

پاسادان بکە ئەم یەکبەدوای یەکە تەواوبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31

هەوڵبدە ڕادەی پانزەهەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

أ $-3, -5, -7, -9, \ldots$

ب $9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \ldots$

نموونە 3 دۆزینەوەی ڕادە نادیارەکان

ڕادە نادیارەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی **11, ■, ■, ■, −17** بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

یاسا	$a_n = a_1 + (n-1)d$
لەجیاتی دابنێ	$-17 = 11 + (5-1)d$
سادەبکە	$-7 = d$

هەنگاوی 2 ڕادە نادیارەکان بە بەکارهێنانی $a_1 = 11$ و $d = -7$ بدۆزەوە.

$$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$$
$$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$$
$$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$$

هەوڵبدە »ڕادە نادیارەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی **2, ■, ■, ■, 0** بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی نێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەکەی پێش خۆی یەکسانن، ئەوا زانینی دوو ڕادە بەسە بۆ دۆزینەوەی بنچینە.

نموونە 4 دۆزینەوەی ڕادەی نونی nی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بەزانینی دوو لەڕادەکانی

ڕادەی شەشەمی یەکبەدوای یەکە ژمارەییەك بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $a_9 = 120$ و $a_{14} = 195$

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

یاسای گشتی.	$a_n = a_1 + (n-1)d$
یاسا	$a_{14} = a_1 + (14-1)d = a_1 + 13d$
یاسا	$a_9 = a_1 + (9-1)d = a_1 + 8d$
لێدەربکە	$a_{14} - a_9 = 5d$
لەجیاتی دابنێ.	$195 - 120 = 5d$
شیکاربکە.	$15 = d$

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا.
$120 = a_1 + (9-1)(15)$	لەجیاتی دابنێ.
$120 = a_1 + 120$	سادەبکە.
$0 = a_1$	شیکاربکە.

هەنگاوی 3 ڕادەی شەشەم a_6 بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا.
$a_6 = 0 + (6-1)15$	لەجیاتی دابنێ.
$= 75$	سادەبکە.

ڕادەی شەشەم لەم یەك بەدوای یەکە دەکاتە 75 .

هەوڵبدە ڕادەی یانزەهەمی هەر یەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت.

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$ ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

زۆرجار شیکاری پرسیارێك پێویستی بە سەرجەمی چەند ڕادەیەکی سەرەتایی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی دەبێت، بۆ نمونە پێویست بە سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم دەبێت. ئەگەر سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانت هەتا پلە n بە S_n هێماکرد واتا:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

ئەوا

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی

بە وشە	بە ژمارە	بە جەبر
سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بریتییەلە ئەنجامی لێکدانی ژمارەی ئەو ڕادانە لەناوەڕاستەی ڕادەی یەکەم و دوا ڕادە.	سەرجەم $2+4+6+8+10$ بریتییەلە $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ کاتێك n ژمارەی ڕادەکانە و a_1 ڕادەی یەکەمە و a_n دوا ڕادەیە.

نمـــونـــە 5 **دۆزینەوەی سەرجەمی بەشی یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی**

سەرجەمی داواکراو لەهەریەك لەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

أ S_{15} بۆ یەکبەدوای یەکی
25, 12, (–1), (–14), ...

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$d = 12 - 25 = -13$

ب S_{12} بۆ یەکبەدوای یەکێك ڕادەی نونی $a_n = 3 + 4n$

هەنگاوی 1 دوو ڕادەی a_1 و a_{12} بدۆزەوە

$a_1 = 3 + 4 \times 1 = 7$

$a_{12} = 3 + 4 \times 12 = 51$

هەنگاوی 2 ڕادەی a_{15} بدۆزەوە.

$$a_{15} = 25 + (15-1)(-13)$$
$$= -157$$

هەنگاوی 3 ڕادەی S_{15} بدۆزەوە.

$$S_{15} = n\left(\frac{a_1 + a_{15}}{2}\right)$$
$$= 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$$
$$= 15\left(\frac{-132}{2}\right) = -990$$

هەنگاوی 2 ڕادەی S_{12} بدۆزەوە.

$$S_{12} = n\left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right)$$
$$= 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$$
$$= 348$$

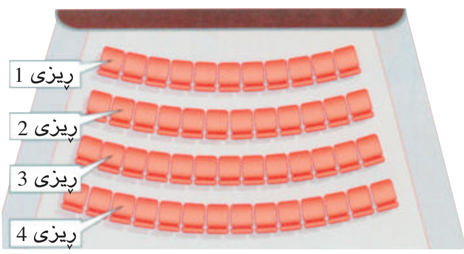
هەوڵبدە سەرجەمی داواکراو لەهەریەك لەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

أ S_{16} بۆ یەکبەدوای یەکی
$12, 7, 2, (-3), \ldots$

ب S_5 بۆ یەکبەدوای یەکێك ڕادەی نونی
$a_n = 50 - 20n$ بێت.

نموونە 6 **جێبەجێکردن لە شانۆیەکان**

لەباڵی ناوەڕاستی یەکێك لەشانۆ جیهانییەکان، ژمارەی کورسییەکانی 14 ڕیزی یەکەمی، یەك بەدوای یەکێکی ژمارەیی پێکدەهێنن.



أ ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی 14 چەندە؟

تێبینیبکە کە ژمارەی کورسییەکان لەڕیزێك بۆ ڕیزێکی تر یەك زیاد دەکات، یاسایەکە بنووسە و $a_1 = 11$ و $d = 1$ بەکاربهێنە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — یاسای ڕادەی نونی بنووسە

$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$ — لەجیاتی دابنێ

$= 11 + 13$

$= 24$ — سادەبکە

لەڕیزی چواردەم 24 کورسی هەیە.

ب ژمارەی کورسییەکانی 14 ڕیزی یەکەم چەندە؟

S_{14} بدۆزەوە بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ — یاسا

$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$ — لەجیاتی دابنێ

$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$ — سادەبکە

لە 14 ڕیزی یەکەم 245 کورسی هەیە.

هەوڵبدە **چۆن ئەگەر... ؟** وا دابنێ ژمارەی کورسییەکانی هەر ڕیزێك، لە ڕیزی دووەمەوە دوو کورسی زیاترە لە ڕیزەکەی پێش خۆی.

أ ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی 14 چەندە؟

ب ژمارەی کورسییەکانی 14 ڕیزی یەکەم چەندە؟

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن ڕادەی نونی یەکبەدوای یەکی ... ,14 ,8 ,2 ,4 – دەدۆزیتەوە باسیبکە.

2 ڕوونیبکەوە بۆچی بڕی ڕادەی نونی $(n-1)d$ لەخۆدەگرێت بەڵام nd تێدانییە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە، بنچینە و ڕادەی دوای ڕادەی کۆتایی بدۆزەوە.

3 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

4 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

ڕادەی هەشتەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

5 $3, 8, 13, 18, \ldots$

6 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

ڕادە نادیارەکانی هەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

7 $13, \blacksquare, \blacksquare, 25, \ldots$

8 $9, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 37, \ldots$

9 $1.4, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, -1, \ldots$

ڕادەی نۆیەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

10 $a_5 = 19, a_4 = 27$

11 $a_4 = 12.6, a_3 = 12.2$

12 $a_6 = -11, a_3 = -5$

سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

13 S_{15} بۆ یەکبەدوای یەکی
$5, 9, 13, 17, \ldots$

14 S_{12} بۆ یەکبەدوای یەکێك ڕادەی نونی
$a_n = -2 + 6n$ بێت.

15 **کرێ** بڵند دەستی بەکارکردن کرد لەیەکێك لە کۆمپانیاکانی زانیاری بە مووچەی ساڵانەی بڕەکەی 26 000 000 دینار بە مەرجێك مووچەکەی ساڵانە 1 250 000 دینار زیاد بکات؟

أ مووچەکەی لەساڵی شەشەم دەبێتە چەند؟

ب سەرجەمی ئەو مووچەی لە شەش ساڵی یەکەم وەریدەگرێت چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە، بنچینە و ڕادەی دوای ڕادەی کۆتایی بدۆزەوە.

16 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

17 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

ڕادەی یازدەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

18 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

19 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

ڕادە نادیارەکانی هەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

20 $77, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 33, \ldots$

21 $-29, \blacksquare, \blacksquare, -2, \ldots$

ڕادەی دوازدەمی هەریەك لەم یەكبەدوای یەكە ژمارەییانە بدۆزەوە.

22 $a_5 = 16.2, a_4 = 18.4$ **23** $a_8 = 46, a_4 = -2$ **24** $a_{25} = -58, a_{22} = -49$

سەرجەمی داواكراو بدۆزەوە.

25 S_{15} بۆ یەكبەدوای یەكی $-18, -16, -14, ...$

26 S_{14} بۆ یەكبەدوای یەكێك ڕادەی نونی بێت $a_n = 14 - \frac{1}{2}n$

27 **بەكاربردن** كاژیان پۆشاكێكی بەقیست كڕی، لەحەفتەی یەكەمدا 15000 دیناری بە فرۆشیارەكەدا. لەگەڵ فرۆشیارەكە ڕێككەوت هەر حەفتەیەك 5000 دینار بۆ قیستەكە زیادبكات.

أ لەحەفتەی نۆیەمدا چەند پارە دەدات؟

ب سەرجەمی ئەو بڕە پارەی لەكۆتایی حەفتەی نۆیەمدا داویەتی چەندە؟

28 **تەلار** هەرەمی لۆڤەر لە پاریس لەبەردەم مۆزەخانەی لۆڤەر لەهەشتایەكانی سەدەی بیستەمدا دروستكراوە. ئەو هەرەمە بە پارچە شوشە بەندكرا. هەرەمەكە لەچەند ئاستێك پێكدێت، ئاستی سەرەوەی لە 4 پارچە شووشە تێدایە ژمارەی پارچە شووشەكان تا بەرەو خواربێت 4 زیادەكات.

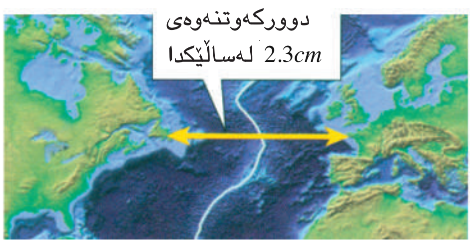


أ بەپێی n ژمارەی پارچە شووشەكان لە ئاستی n بنووسە.

ب ئەگەر هەرەمەكە لە 18 ئاست پێكبهاتبایە. ژمارەی پارچە شوشەكان چەندە؟

ج لەڕاستیدا ژمارەی ئەو پارچە شووشانەی بەكارهاتووە 11 پارچە شووشە كەمترە لەوەی هەژمارت كرد، بەهۆی دروستكردنی دەروازەیەك بۆ چوونەوە ناو هەرەمەكە. ژمارەی ئەو پارچە شووشانەی لەهەرەمی لۆڤەردا بەكارهاتوو چەندە؟

29 **زەویناسی** كیشوەری ئەمریكای باكوور ساڵانە لە كیشوەری ئەوروپا دوور دەكەوێتەوە.



أ پاش 50 ساڵ كیشوەری ئەمریكای باكوور چەند لە ئەوروپا دوور دەكەوێتەوە؟

ب پاش چەند ساڵ دوو كیشوەرەكە بەلایەنی كەمەوە 1 كم لەیەكتری دوور دەكەونەوە؟

ڕوانین بۆ دواوە

دیاریبكە ئایا نەخشەكە نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی گەڕانەوەیە.

30 $f(x) = 1.25(0.75)^x$ **31** $f(x) = 1.43(5.32)^x$ **32** $f(x) = 0.92(0.64)^x$

ڕوانین بۆ پێشەوە

33 ڕادەی یەكەمی یەكبەدوای یەكێك دەكاتە 2 . هەر ڕادەیەكیتر دووئەوەندەی ڕادەی پێش خۆیەتی. دە ڕادەی یەكەمی ئەو یەكبەدوای یەكە بنووسە.

وانەی 2

یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان
Geometric Sequences



بۆچی؟ پلاندانەرانی یارییەوەرزشییەکان یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان بۆ دیاریکردنی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا بەکاردێنن.

ئامانجەکان
- یەک بەدوای یەکە ئەندازەییەکان دەناسێت.
- رادەی داواکراو لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دەدۆزێتەوە.
- بەشە سەرجەمەکانی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دەدۆزێتەوە.

زاراوەکان Vocabulary

یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی Geometric Sequence

سیرینا ولیامز لەنێوان 128 یاریکەردا لەتۆپی تێنسی پاڵەوانێتی کچان لە ویمبڵدون Wimbledon ساڵی 2003 دا پلەی یەکەمی بەدەستهێنا، لەکۆتایی هەریارییەکی نێوان دوو یاریکەر، یاریکەری براوە بەردەوام دەبێت بەڵام دۆڕاوەکە دەچێتە دەرەوە. ئەمەش ئەوە دەگەینێت کە ژمارەی یاریکەرەکان لەکۆتایی هەر خولێکدا بۆ نیوە کەمدەکات. دەکرێت ئەو یاریکەرانەی لەکۆتایی هەر خولێکدا دەمێنێتەوە بە بەکارهێنانی **یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی** دیاریبکرێن.

لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا Geometric sequence رێژەیی هەر رادەیەك بۆ رادەکەی پێش خۆی نەگۆڕە و جیاوازە لە 1 . بەو رێژەیە دەوترێت **بنچینە** Common ratio . بنچینەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکەی سەرەوە بریتیە لە $\frac{1}{2}$.

خول	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16
رێژە		$\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$	$\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$	$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

بۆ دیاریکردنی ئەوەی یەکبەدوای یەکێك ئەندازەییە، رێژەی هەر رادەیەك بۆ رادەکەی پێش خۆی هەژماربکە ئەگەر ئەو رێژانە یەکسان بوون، یەکبەدوای یەکەکە دەبێتە ئەندازەیی.

نمـــونـــە 1 جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

دیاربکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان ژمارەییە یان هیترە، ئەگەر ئەندازەییە، ئەوا بنچینەکە و رادەی دوای ئەو رادەیەی لەکۆتاییدا دراوە بدۆزەوە.

أ $8, 12, 18, 27, \ldots$

	8	12	18	27
جیاوازی		4	6	9
رێژە		$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییە

بنچینە $r=\frac{3}{2}$

رادەی دوایی: 40.5

ب $8, 16, 24, 32, \ldots$

	8	16	24	32
جیاوازی		8	8	8
رێژە		2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$

یەکبەدوای یەکێکی ژمارەییە:

بنچینە $d=8$

رادەی دوایی: 40

ج $6, 10, 15, 21, \ldots$

	6	10	15	21
جیاوازی		4	5	6
رێژە		$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

یەکبەدوای یەکەکە نە ئەندازەییە و نە ژمارەییە

هەوڵبدە **دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا، ئەگەر ئەندازەییە، ئەوا بنچینە و رادەی دوای ئەو رادەیەی لەکۆتاییدا دراوە بدۆزەوە.**

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \ldots$ **ب** $1.7, 1.3, 0.9, 0.5, \ldots$ **ج** $-50, -32, -18, -8, \ldots$

هەرڕادەیەکی یەکبەدوای یەکە ئەندازەیی کە لە سەرەتای وانەکەدا هاتووە، بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ڕادەی یەکەم لە یەکێك لەهێزەکانی بنچینە وەك لەم خشتەیە دەردەکەوێت.

ژمارەی یاریکەرەکان لەهەر خولێکی ویمبڵدون					
خول	1	2	3	4	n
ژمارەی یاریکەران	128	64	32	16	a_n
ڕێسا	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

یاسای گشتی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی

ڕادەی نونی a_n یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بەم یاسایە هەژماردەکرێت

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و r بنچینەکەی بێت.

بۆ دۆزینەوەی بنچینە لەیەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی، ڕادەیەك جگەلە ڕادەی یەکەم دابەش ڕادەی پێش خۆی بکە، ئەنجامی دابەشکردنەکە دەبێتە بنچینە.

نمـــونـــە 2

هەژمارکردنی ڕادەی نونی n ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی

«ڕادەی نۆیەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی... $-5, 10, -20, 40, -80,$ بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 بنچینەی یەکبەدوای یەکەکە بە بەکارهێنانی یاسا بدۆزەوە $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

هەنگاوی 2 ڕادەی نۆیەم بە بەکارهێنانی یاسا هەژماربکە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ یاسا

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$ لەجیاتی دابنێ

$a_9 = -5(256) = -1280$ سادەبکە

ڕادەی نۆیەمی ئەم یەکبەدوای یەکە دەکاتە -1280

پاسادانبکە ئەم یەکبەدوای یەکە تەواوبکە.

$$a_5 = -80$$
$$a_6 = -80(-2) = 160$$
$$a_7 = 160(-2) = -320$$
$$a_8 = -320(-2) = 640$$
$$a_9 = 640(-2) = -1280 \checkmark$$

هەوڵبدە ڕادەی نۆیەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە.

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

نموونە 3 **دۆزینەوەی ڕادەی نونی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەزانینی دوو لە ڕادەکانی**

ڕادەی دەیەمی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە، ئەگەر زانیت 96 = a_5 و $a_7 = 384$

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاسای گشتی.
$a_7 = a_1 r^{7-1} = a_1 r^6$	بەهاکەی لەجیاتی n دابنێ.
$a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4$	بەهاکەی لەجیاتی n دابنێ.
$\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^4} = r^2$	دابەش بکە.
$\frac{384}{96} = r^2$	لەجیاتی دابنێ.
$4 = r^2$	سادەبکە.
$\pm 2 = r$	شیکاربکە.

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

لەهەر بارێك لەبارەکانی r بەتەنها بکۆڵەوە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاسا
$96 = a_1 (2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	لەجیاتی دابنێ
$6 = a_1$	$6 = a_1$	سادەبکە

هەنگاوی 3 ڕێسای یەکبەدوای یەك بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی a_{10}

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاسا
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	لەجیاتی دابنێ
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	10 لەجیاتی n دابنێ
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	سادەبکە

ڕادەی دەیەمی یەکبەدوای یەکەکە دەکاتە 3072 کاتێك $r=2$ و -3072 کاتێك $r = -2$.

ئاگاداربە!

کاتێك دوو ڕادە لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێك درابێت، جەخت بکە لەوەی کە بەهای موجەب و بەهای سالبی r وەربگرێت ئەگەر ئەوە لە توانادابێت.

هەوڵبدە **ڕادەی حەفتەمی هەریەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.**

أ $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$ ب $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

زۆرجار شیکاری پرسیارێك پێویستی بەسەرجەمی چەند ڕادەیەکی سەرەتای یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دەبێت، بۆ نموونە پێویستیت بە سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم دەبێت. ئەگەر سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانت هەتا ڕادەی n بە S_n کرد واتا $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

ئەوا

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی

سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانی (S_n) یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$ هەژمار دەکرێت بە بەکارهێنانی یاسای:

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right); r \neq 1$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە و r بنچینەکەی بێت.

نمــــونــــه 4 دۆزینەوەی سەرجەمی بەشی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی

سەرجەمی داواکراو لەهەریەك لەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە

أ S_7 بۆ یەکبەوەدای یەکی
3 (–6), 12, (–24), ...

هەنگاوی 1 ڕێژەی هاوبەش(بنچینە) بدۆزەوە.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

هەنگاوی 2 ڕادەی S_7 بدۆزەوە کە $a_1 = 3$ و $r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$$

ب S_5 بۆ یەکبەدوای یەکێك ڕادەی نونی $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ بێت.

هەنگاوی 1 ڕادەی a_1 بدۆزەوە.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

هەنگاوی 2 ڕادەی S_5 بدۆزەوە.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

هەوڵبدە سەرجەمی داواکراو لەهەریەك لەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە.

أ S_8 «بۆ یەکبەدوای یەکی $\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$

ب S_6 بۆ یەکبەدوای یەکێك کە ڕادەی نونی $a_n = (-3)(2)^{n-1}$ بێت.

نمــــونــــه 5 جیبەجیکردن لە وەرزشدا



لەخولی ویمبلّدون بۆ تۆپی تێنسی سەر زەوی 128 یاریکەر بەشداریانکرد. ژمارەی یاریکەرەکان لە کۆتایی هەر خولێك بۆ نیوە دەمێنێتەوە. چەند یاری لە پاڵەوانێتیەکە ئەنجامدرا؟

هەنگاوی 1 یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

n = ژمارەی خولەکان

a_k = ژمارەی یارییەکانی خولی k

S_n = کۆی ژمارەی یارییەکان لە n خولدا.

$$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

خولی یەکەم 64 یاریە، بۆیە $\frac{128}{2} = 64$، لەبەرئەوەی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا نیوەی ژمارەی یارییەکانی خولی پێشوو دەبێت.

هەنگاوی 2 ژمارەی خولەکان بدۆزەوە.

$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	خولی کۆتایی یەك یاری ئەنجام دەدرێت.
$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	بەشی توانی لەبڕەکە جیابکەوە، بە دابەشکردن بەسەر 64 دا.
$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{1}{64}$ بەشێوەی توانێك لە توانەکانی $\frac{1}{2}$ بنووسە.
$6 = n-1$	تواناکان یەکسان بکە.
$7 = n$	سادەبکە.

هەنگاوی 3 کۆی گشتی یارییەکان بدۆزەوە.

$$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$$

یاسای سەرجەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بەکاربهێنە.

لە خولەکە 127 یاری ئەنجام دراوە.

هەوڵبدە کۆمپانیایەکی گەورە ساڵانە 84 000 000 دینار کرێی بارەگایەکەی دەدات، ئەو بڕە ساڵانە 8% زیاددەکات لەماوەی 6 ساڵدا کۆمپانیایەکە چەند پارە دەدات؟

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن ڕادەی نونی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی... ,108 ,36 ,12 ,4دەدۆزیتەوە؟ باسیبکە.

2 ڕوونبکەوە بۆچی بڕی ڕادەی نونی $r^{(n-1)}$ لەخۆدەگرێت بەڵام r^n تێدانییە.

3 کەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی موجەب زیاد دەکات؟ و کەی کەمدەکات؟

4 جیاوازی نێوان یەکبەدوای یەکی ژمارەیی و یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەککە ئەندازەییە یان نا، ئەگەر ئەندازەییە، بنچینە و ڕادەی دوای ئەو ڕادەیەی لەکۆتاییدا دراوە بدۆزەوە.

5 $320, 80, 20, 5, \ldots$

6 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

ڕادەی دەیەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزوە.

7 $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

8 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

ڕادەی شەشەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە بە زانینی دوو ڕادە لە ڕادەکانی

9 $a_5 = -4, a_4 = -12$

10 $a_5 = 108, a_2 = 4$

11 $a_5 = 12, a_3 = 3$

سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

12 S_8 بۆ یەکبەدوای یەکی $2, 0.2, 0.02, \ldots$

13 S_8 بۆ یەکبەدوای یەکێك ڕادەی نونی $a_n = (-3)^{n-1}$ بێت.

14 **مووچە** مامۆستایەکی زمان لە ساڵی یەکەمدا مووچەکەی 8 000 000 دینارە. ئەو مووچەیە ساڵانە بەڕێژەی 5% زیاد دەکات، لە بیستەمین ساڵی خزمەتیدا مووچەکەی دەبێتە چەند؟ لەو ماوەیەدا چەندی وەرگرتووە؟

أ مووچەکەی لە ساڵی شەشەم دەبێتە چەند؟

ب سەرجەمی ئەو مووچانەی لەشەش ساڵی یەکەم وەریدەگرێت چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەککە ژمارەییە یان ئەندازەییە یان هیچیان نییە، ئەگەر ئەندازەییە، بنچینە و ڕادەی دوای ئەو ڕادەیەی لەکۆتاییدا دراوە بدۆزەوە.

15 $-36, -49, -64, -81, \ldots$

16 $-2, -6, -18, -54, \ldots$

ڕادەی نۆیەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە.

17 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \cdots$

18 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

ڕادەی حەفتەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەیانە بدۆزەوە بەزانینی دوو ڕادە.

19 $a_5 = 162, a_4 = 54$

20 $a_6 = -100, a_4 = -4$

سەرجەمی داواکراو لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

21 S_6 بۆ یەکبەدوای یەکی... $5, 25, 125,$

22 S_7 بۆ یەکبەدوای یەکێك ڕادەی نونی $a_n = 8(10)^{n-1}$ بێت.

23 **باپیران** دایك و باوك و دوو باپیر و دوو داپیر و 4 بابی باپیر و 4 دایکی داپیرت هەیە.

أ ژمارەی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە لەماوەی 6 نەوەی پێش تۆ چەندە؟ لەماوەی 21 نەوەدا چەندە؟

ب **چی دەبێت ئەگەر...؟** ڕێسای هەژمارکردنی باپیرەکان و داپیرەکان چۆن دەگۆڕێت ئەگەر تۆ یەکەم نەوە بیت؟

24 **قیستە زانکۆییەکان** لەڕۆژی لەدایکبوونی ڕووناك داپیری و باپیری بڕیاریاندا قیستەکانی خوێندنی زانکۆی بۆ بدەن. لەڕۆژی لەدایکبوونیدا 50 دیناریان بۆ دانا. بڕیاریاندا هەر ساڵێك دوو ئەوەندەی ساڵەکەی پێشووی بۆ دابنێن، کاتێك ڕووناك تەمەنی دەبێتە 18 ساڵ چەند پارەی بۆ کۆدەبێتەوە؟ کە تەمەنی دەگاتە 21 ساڵ چەند پارەی بۆ کۆدەبێتەوە؟

25 **تەکنۆلۆژیا** نامەیەکی ئەلیکترۆنیت بەدەست گەیشت، تێیدا داوای بەختێکی باشت بۆ دەکات، داوای لێکردوویت بۆ 5 هاوڕێت بینێریت، و داوا لەهەر یەکێکیان بکەیت لەلای خۆیانەوە بۆ 5 هاوڕێی تری بنێرن هەروەها ... ژمارەی نامەکان پاش 10 ئاست دەبێتە چەند؟

26 دەزگایەك بارەگایەکی بەکرێ گرت بە کرێی مانگانەی 750 000 دینار لە ساڵی یەکەم، ئەم بڕە پارە ساڵانە بەرێژەی 10% زیاددەکات پاش ساڵی یەکەم.

أ یەکبەدوای یەکێك بنووسە، ئەو بڕە پارەی دەزگایەکە ساڵانە دەیدات لە 5 ساڵ بنوێنێت.

ب سەرجەمی ئەو بڕە پارەی دەزگایەکە لەماوەی 10 ساڵ دەیدات بدۆزەوە.

27 **پزیشکی** یەکێك لە نەخۆشخانەکان 16 نەخۆشی ئەنفلۆزای لە حەفتەی یەکەم و 56 نەخۆش لە حەفتەی دووەم و196 نەخۆش لە حەفتەی سێیەم تۆمارکرد.

أ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە، ژمارەی تووشبوان بە نەخۆشی ئەنفلۆنزا بنوێنێت.

ب ئەگەر تووشبوان بە نەخۆشییەکە بە هەمان شێوە زیادیکرد، لەکام حەفتە سەرجەمی تووشبوان دەگاتە 10 000؟

28 **بنووسە** چی ڕوودەدات لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی، ئەگەر ڕادەی یەکەمی 3 ئەوەندە چەندجارە بوو؟ سەرجەمی ڕادە یەکەمەکانی چی بەسەردێت؟

ڕوانین بۆ دواوە

سەرجەمی دە ڕادەی یەکەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

29 $78, 65, 52, 39, 25, \ldots$

30 $1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, \ldots$

ڕوانین بۆ پێشەوە

داتاشراوی هەر ڕادەیەك بدۆزەوە.

31 $f(x) = 4x^3$

32 $f(x) = x^{-3}$

33 $f(x) = 2x^7$

بەشی

5

جیاکاری و تەواوکاری

Differentiation and Integration



وانەکان

1. جێبەجێکردنەکانی جیاکاری لە ئابووریدا
2. تەواوکاری

وانەی 1

جێبەجێکردنەکانی جیاکاری لە ئابووریدا

Applications of Differentiation to Economics



بۆچی؟

نەخشەکان بۆ دروستکردنی نمونەی بیرکاری بەکاردێن وەك نەخشەی خستنەروو و نەخشەی خواستی و نەخشەی قازانج و گەلێکی تر ئابوریناسان ئەو نەخشانە و داتاشراوەکانیان بۆ لێکۆڵینەوەی ئەو نمونانە بەکاردەهێنن.

ئامانجەکان

- هەژمارکردنی جیاکاری بۆ دۆزینەوەی پێوانە پەراوێزییەکان و بەپێزی (نەرمی نواندن) لە ئابووریدا جێبەجێدەکات.
- داتاشراو بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی گەورەترین و بچوکترین بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

پێوانە پەراوێزەکان
Marginal Measures

بەپێزی (نەرمی نواندن)
Elasticity

بەهای گەورەترین خۆجێی
Local maximum

بەهای بچوکترین خۆجێی
Local minimum

تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم
Test of first derivative

لەپۆلی یازدەمدا فێربوویت چۆن داتاشراوی نەخشەیەك دەدۆزیتەوە. بە بیری خۆت بهێنەوە کە داتاشراوی نەخشە بریتییە لە نەخشەیەك بە بەکارهێنانی داتاشراوە بنەڕەتییەکان و ڕێسایەکانی داتاشراو دەدۆزرێتەوە. لە خشتەی خوارەوە ئەو داتاشراوە بنەڕەتییانەی زۆر بەکاردێن لە پۆلی یازدە و دوازدەمدا دەردەکەوێت.

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=c$ ، c ژمارەیەکی ڕاستییە	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$ ، n ژمارەیەکی ڕاستییە
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\ln\big(g(x)\big)$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=e^{g(x)}$	$f(x)=g'(x)e^{g(x)}$

لەخشتەی خوارەوە هەندێك ڕێسایەکانی داتاشراو دەردەکەوێت.

ناوی ڕێسا	داتاشراو
ڕێسای لێکدان لەژمارە	$\big(af(x)\big)' = af'(x)$
ڕێسای داتاشراوی سەرجەم	$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$
ڕێسای داتاشراوی جیاوازی	$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x)$
ڕێسای لێکدان	$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
ڕێسای دابەشکردن	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
ڕێسای نەخشەی نەخشە	$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = g'(x)f'\big(g(x)\big)$

نمـــونـــه 1

هەژمارکردنی داتاشراوەکان

داتاشراوی هەریەك لەم نەخشانەی دێن بدۆزەوە.

أ $f(x)=3x^4$ ب $f(x)=5x^4-2x^3$ ج $f(x)=\frac{3}{x}$ د $f(x)=e^{-2x}$

شیکار

أ $f'(x)=(3x^4)'=3(x^4)'=3(4x^3)=12x^3$

ب $f'(x)=(5x^4-2x^3)'=(5x^4)'-(2x^3)'=5(x^4)'-2(x^3)'$
$=5(4x^3)-2(3x^2)=20x^3-6x^2$

ج $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=3\left(\frac{1}{x}\right)'=3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}$

د $f'(x)=(e^{-2x})'=(-2x)'e^{-2x}=(-2)e^{-2x}=-2e^{-2x}$

هەوڵبدە داتاشراوی هەریەك لەم نەخشانەی دێن بدۆزەوە.

أ $f(x)=5x^7$ ب $f(x)=3x^6-3x^2$ ج $f(x)=\frac{-2}{x}$ د $f(x)=e^{3x}$

پێوانە پەراوێزەکان لەئابووریدا

لەچالاکییەکانی دەزگایەکانی پێشەسازی و بازرگانیدا، دەتوانرێت سێ شت جیابکرێتەوە: **تێچوونەکان** Cost (بریتییە لە تێچوونی دەزگایەك بۆ ڕاپەڕاندنی کارەکانی) و **دەستکەوتەکان** Revenues (بریتییە لە دەستکەوتەکانی دەزگایەك لە ئەنجامی کارەکانی) و **قازانجەکان** Profits (بریتییە لەو برە پارەیەی بۆ دەزگایەك دەمێنێتەوە پاش لێدەرکردنی تێچوونەکان لە دەستکەوتەکان).

لەپۆلی یازدەمدا زانیت کە باسکردن لەپێوانەی پەراوێز دەگەڕێتەوە بۆ داتاشراو: **تێچوونی پەراوێز** Marginal cost بریتیەلە داتاشراوی نەخشەی تێچوون، **داهاتی پەراوێز** Marginal revenue بریتیەلە داتاشراوی نەخشەی داهات (دەستکەوت)، **قازانجی پەراوێز** Marginal Profit بریتیەلە داتاشراوی نەخشەی قازانج، لەبیرت بێت کە پێوانەی پەراوێز گۆڕانی پێوانەی گشتی بەزیادبوونی هێندەکە یەك یەکە دەردەبڕێت، نمونە: تێچوونی پەراوێز لەئاستێکی دیاریکراوی بەرهەم (بۆ نمونە 500) بریتییە لە گۆڕان لە تێچوونی گشتی کاتێك بەرهەم یەك یەکە زیاد دەکات واتا کاتێك دەبێتە 501 . دوو هۆکار داهات R دیاریدەکات: **ژمارەی یەکە فرۆشراوەکان** Q و **نرخی یەك یەکە** P ، بەمەش $R=P\times Q$. بەڵام دوو شت تێچوون دیاریدەکات: **تێچوونی گۆڕاو** Variable cost کە بریتیەلە نەخشەیەك بەپێی ژمارەی یەکەکانی بەرهەم، و **تێچوونی نەگۆڕ** Fix cost کە ناگۆڕێت بەگۆڕانی ژمارەی ئەو یەکانە.

نمـــونـــه 2

دۆزینەوەی نەخشەی قازانجی پەراوێز

کۆمپانیای زێڕ یەك جۆرە قوتوی زەیتون دەفرۆشێت. نەخشەی خواست بۆئەو جۆرە زەیتونە بریتییە لە:

$$P(Q)=20000-\frac{Q}{10}$$

(لەبیرت بێت کە نرخ دەگۆڕێت بەگۆڕانی داواکاری (خواست) بۆ قوتوە زەیتونەکان بەپێی یاسای خواست و خستنەڕوو)، Q هێمایە بۆ ژمارەی قوتوە فرۆشراوەکان و P هێمایە بۆ نرخی یەك قوتو.

لەلایەکی تر، نەخشەی تێچوون بریتییە لە $C(Q)=50000+3000Q$

أ ژمارەی 50 000 لەنەخشەی تێچوون چی دەنوێنێت؟
ژمارەی 3 000 لەهەمان نەخشە چی دەنوێنێت؟

ب نەخشەی قازانج بدۆزەوە.

ج نەخشەی قازانجی پەراوێز بدۆزەوە.

شیکار

أ ژمارەی 50 000 لەنەخشەی تێچوون، بریتییە لە تێچوونی کۆمپانیایەکە ژمارەی قوتوە فرۆشراوەکان هەر چەند بێت. کە تێچوونێکی نەگۆڕە بەڵام 3 000 بریتییە لە تێچوونی کڕینی یەك قوتو.

ب قازانج بریتییە لە ئەنجامی لێدەرکردنی تێچوون لە داهات، نەخشەی دەستکەوت بریتییە لە:

$$R(Q) = P \times Q = 20000Q - \frac{Q^2}{10}$$

کەواتە نەخشەی قازانج بریتییە لە:

$$S(Q) = 20000Q - \frac{Q^2}{10} - (50000 + 3000Q)$$

$$S(Q) = 17000Q - \frac{Q^2}{10} - 50000$$

ج نەخشەی قازانجی پەراوێز بریتییە لە $S'(Q) = 17000 - \frac{Q}{5}$.

هەوڵبدە

کارگەی فرات یەك جۆر قوتوی کونجی دەفرۆشێت، نەخشەی خواستی ئەم جۆرە قوتوە بریتییە لە

$$P(Q) = 17000 - \frac{Q}{20}$$

(لەبیرت بێت کە نرخ دەگۆڕێت بەگوێرانی یاسای خواست و خستنەڕوو) کاتێك Q هێمایە بۆ ژمارەی قوتوە فرۆشراوەکان، و P هێمایە بۆ نرخی یەك قوتو، لەلایەکی تر، نەخشەی تێچوون بریتییە لە:

$$C(Q) = 30000 + 8000Q$$

أ ژمارەی 30 000 لەنەخشەی تێچوون چی دەنوێنێت؟
ژمارەی 8 000 لەهەمان نەخشە چی دەنوینێت؟

ب نەخشەی قازانج بدۆزەوە.

ج نەخشەی قازانجی پەراوێز بدۆزەوە.

بەپێزی(نەرمی نواندن) لە ئابووریدا

بەکاڵایەك دەووترێت بەپێزە Elastic ئەگەر خواست لەسەری زیاد بکات یان کەمبکات بەشێوەیەکی دیار لەئەنجامی دابەزینی یان زیادبوونی نرخەکەی. ئابووریناسان بەپێزی کاڵایەك لە نەخشەی خواست لەسەری پێوانە دەکەن ئەگەر $P(Q)$ نەخشەی خواست بێت، ئەوا بەپێزی بریتییە لە $e = \frac{P}{Q} \times \frac{1}{P'(Q)}$ و وای دادەنێین کە کاڵایەك بەپێزە ئەگەر $|e| > 1$ و بەپێز نییە ئەگەر $|e| < 1$.

نموونە 3

دۆزینەوەی بەپێزی كاڵایەك

نەخشەی خواست بۆ كاڵایەك بریتییە لە $P(Q) = 50 + Q - Q^2$ بەپێزی ئەو كاڵایە لە $Q = 4$ بدۆزەوە.

شیكار

$P(4) = 50 + 4 - 4^2 = 50 + 4 - 16 = 50 - 12 = 38$ لەلایەكی تر، $P'(Q) = 1 - 2Q$

و $P'(4) = 1 - 2 \times 4 = 1 - 8 = -7$ لەمە دەردەچێت $e = \frac{P}{Q} \times \frac{1}{P'(Q)} = \frac{38}{4(-7)} = -\frac{38}{28}$

و $|e| = \left|-\frac{38}{28}\right| = \frac{38}{28} > 1$ بەمەش دەردەكەوێت كاڵایەكە بەپێزە.

هەوڵبدە نەخشەی خواست بۆ كاڵایەك بریتییە لە $P(Q) = 10 + 2Q - 3Q^3$ بەپێزی ئەو كاڵایە لە $Q = 10$ چەندە؟

دۆزینەوەی بەهاكانی ئەوپەڕی

دۆزینەوەی بەهای ئەوپەڕی جێبەجێكردنی بنەڕەتی جیاكاری پێكدەهێنێت و زۆرترین بەكارهێنانی هەیە. بۆ نموونە: دیاریكردنی ژمارەی كارمەندانی كارگەیەك كاتێك قازانجەكەی ئەوپەڕی بێت، یان كەمكردنەوەی كارمەندەكانی كاتێك تێچوونەكەی دەگاتە ئەو پەڕی نزمی.

بۆئەمە، جیاكاری ڕێسایەكمان دەداتێ پێی دەوترێت **ڕێسای داتاشراوی یەكەم**.

ڕێسای داتاشراوی یەكەم

ئەگەر نەخشەی $f(x)$ بەهاكانی ئەوپەڕی هەبێت (گەورەترین یان بچوكترین) لە $x = c$ ئەوا $f'(c)$ پێناسەنەكراوە یان $f'(c) = 0$.

كەواتە بۆ دۆزینەوەی بەهاكانی x كە بەهای ئەوپەڕی نەخشەكە دەستەبەر دەكات، بەهاكانی x بدۆزەوە كە پاسادانی $f'(x) = 0$ دەكات.

نموونە 4

پێدراوەكانی نموونەی 2 بەكاربهێنە بۆ دیاریكردنی ئەو هێندەی كە گەورەترین قازانج بۆ كارگەكە دابین دەكات. نرخی قوتویەك چەندبێت كە گەورەترین قازانج بەدەستدینێت؟ ئەو قازانجە چەندە؟

شیكار

نەخشەی قازانج لە نموونە 2 بریتییە لە

$$S(Q) = 17000Q - \frac{Q^2}{10} - 50000$$

بۆ دیاریكردنی ئەو هێندەی گەورەترین قازانج بۆ گاركەكە دابین دەكات، داتاشراو بدۆزەوە

$$S'(Q) = 17000 - \frac{Q}{5}.$$

پاشان هاوكێشەی $S'(Q) = 0$ شیكاربكە و ئەمەت دەستدەكەوێت

$$Q = 17000 \times 5 = 85000.$$

كەواتە فرۆشتنی 85 000 قوتو زەیتون گەورەترین قازانج دابین دەكات.

نرخی یەك قوتو زەیتون كە گەورەترین قازانج دابین دەكات بریتیەلە

$$P(Q) = 20\,000 - \frac{Q}{10} = 20\,000 - \frac{85\,000}{10} = 20\,000 - 85\,00 = 11500$$

واتا 11 500 دینار. گەورەترین قازانج بریتیەلە

$$S(Q) = 17\,000 \times 85\,000 - \frac{(85\,000)^2}{10} - 50\,000 = 722\,450\,000$$

واتا 722 450 000 دینار.

هەوڵبدە هۆشیار لۆرییەكی هەیە و 5 000 دینار كرێ دەدات بە شوفێرەكە لەهەر كاتژمێرێكدا. تێچوونی ئیشكردنی لۆرییەكە $\frac{v^2}{50}$ دینارە لەیەك كیلۆمەتردا. كاتێك v هێمایە بۆ خێرایی لۆرییەكە بە كیلۆمەتر لە كاتژمێرێكدا، خێرایی چەند بێت لۆرییەكە كەمترین تێچووی دەبێت.

ڕاهێـــــــنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1 پەیوەندی نێوان داهات و تێچوون و قازانج باسبكە.

2 ئەگەر نەخشەی $C(Q) = 0.025Q^3 - 0.05Q^2 + 12.4Q + 22$ نەخشەی تێچوونی بەرهەمهێنانی كاڵایەكی دیاریكراو بێت بەپێی هێندی بەرهەمهێنراو Q . نەخشەی $Av(Q)$ بەپێی Q بنووسە، كە تێچوونی ناوەڕاستی بەرهەمهێنانی یەك یەكە بنوێنێت.

3 نمونەیەك بهێنەوە بۆ كاڵایەك بەپێزییەكەی زۆربچوك بێت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

داتاشراوی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

4 $f(x) = x^2 - 3x$

5 $f(x) = x^{17} + 5x^6$

6 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

7 $f(x) = x^{-2}$

8 $f(x) = \sqrt{x}$

9 $f(x) = \frac{1}{x^7}$

10 $f(x) = 2x^5 + 7x - 4$

11 $f(x) = \frac{x^2 - 7}{4 - x}$

12 نەخشەی $R(Q) = 25Q - 0.05Q^2$ نەخشەی داهات(دەستكەوت) (بەهەزاران دینار) بۆ كاڵایەكی دیاریكراو پێكدەهێنێت، كاتێك Q ژمارەی یەكە فرۆشراوەكان دەنوێنێت.

أ $R(50)$ بدۆزەوە، ئەو وەڵامە چی دەگەینێت، باسیبكە.

ب نەخشەی داهاتی پەراوێز $R_M\,(Q)$ بدۆزەوە.

ج داهاتی پەراوێز لە $Q = 50$ بدۆزەوە. وەڵامەكە چی دەگەیەنێت بەپێی فرۆشتنی یەكەیەكی زیادە؟

د $R(51) - R(50)$ بدۆزەوە، پاشان دیاربكە كە ئەو جیاوازییە چی دەگەیەنێت؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

داتاشراوی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

13 $f(x)=x^{-4}+3x^{4}-x+16$

14 $f(x)=(2x^{2}+3x-7)(4x-6)$

15 $f(x)=(4x-1)^{5}$

16 $f(x)=e^{2x-1}$

17 $f(x)=2x-4e^{-x}+7$

18 $f(x)=\ln(0.1x)$

19 نەخشەی $P(Q)=160-0.1Q$ نەخشەی خواست (بەهەزاران دینار) بۆ کاڵایەکی دیاریکراو پێکدەهێنێت، کاتێك Q ژمارەی یەکەکان بێت، و P نرخی یەك یەکە بێت.

أ نەخشەی داهات بۆ فرۆشتنی Q یەکە بدۆزەوە، داهاتی ئەنجام لە فرۆشتنی 500 یەکە چەندە؟

ب داهاتی پەراوێزی فرۆشتنی 500 یەکە بدۆزەوە و ڕوونیبکەوە.

ج کامیان گەورەترین داهات دابین دەکات: فرۆشتنی یەکەیەکی سەربار لە ئاستی فرۆشتنی 500 یان لە ئاستی فرۆشتنی 700 ؟

20 نەخشەی $C(Q)=300+6Q+\frac{1}{20}Q^2$ نەخشەی تێچوون (بەهەزاران دینار) بۆ کاڵایەکی دیاریکراو پێکدەهێنێت، کاتێك Q ژمارەی یەکە بەرهەمهاتووەکان بێت؟

أ تێچوونی پەراوێز لە $Q=8$ دا بدۆزەوە، ئەم وەڵامە چی دەگەیەنێت بۆ بەرهەمهێنانی یەك یەکەی سەبار؟

ب $C(9)-C(8)$ بدۆزەوە. تێچوونی ڕاستەقینەی بەرهەمهێنانی یەکەی نۆیەم چەندە؟

21 نەخشەی $R(Q)=46Q$ نەخشەی داهات (بەهەزاران دینار) بۆ بەرهەمهێنانی کاڵایەکی دیاریکراو پێکدەهێنێت، کاتێك Q ژمارەی یەکە فرۆشراوەکان بێت و نەخشەی $C(Q)=100+30Q+\frac{1}{10}Q^2$ نەخشەی تێچوون پێکدەهێنێت.

أ نەخشەی قازانج $S(Q)$ بدۆزەوە.

ب $S(100)$ بدۆزەوە.

ج نەخشەی قازانجی پەراوێز بدۆزەوە.

د قازانجی پەراوێز لە $Q=100$ بدۆزەوە. ئەو وەڵامە چی دەگەیەنێت بەپێی بەرهەمهێنانی یەکەیەکی سەربار؟

هـ $S(101)-S(100)$ بدۆزەوە. ئەم جیاوازییە چی دەگەیەنێت؟ ڕوونیبکەوە.

22 نەخشەی $R(x)=\frac{50x}{x^2+36}$ کە $x\geq 0$ نەخشەی داهاتی حەفتانە بە ملیارەها دینار دەنوێنێت بۆ فیلیمێکی سینمایی بەپێی x، کە x ژمارەی ئەو حەفتانەی بەسەر نمایشکردنی تێپەڕبوو دەنوێنێت.

أ ئەو بەهایانەی کە داهاتی پەروێز (المدخول الهامشي) دەکاتە سفر بدۆزەوە.

ب لەکام حەفتە داهاتی نمایشکردنی فیلمەکە گەیشتە ئەوپەڕی بەرزی؟

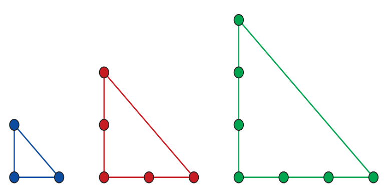
23 نەخشەی داهات بۆ کاڵایەك بریتییە $R(Q)=24Q-0.01Q^2$ کاتێك Q ژمارەی یەکە فرۆشراوەکان دەنوێنێت. نەخشەی داهاتی پەراوێز بدۆزەوە. بەهای داهاتی پەراوێز دەبێتە چەند کاتێك ئاستی فرۆشراو 100 یەکە بێت؟ واتای ئابووری ئەو بەهایە چییە؟

24 نەخشەی $R(Q)=\frac{3000}{2Q+2}+80Q-1500$ نەخشەی داهات (بەهەزاران دینار) بۆ فرۆشتنی Q یەکە لە کاڵایەکی دیاریکراو پێکدەهێنێت، داهاتی پەراوێز کاتێك ئاستی فرۆشتن 149 یەکە بێت بدۆزەوە.

25 سەرکەوتنی فیلمێکی باش کە بە پارەیەکی کەم بەرهەمهاتبوو دەوەستێتە سەر ڕیکلامی زارەکی. ئەگەر نەخشەی $A(x)=\frac{100x}{(x+10)^2}$، ژمارەی بینەرەکانی ئەو فیلمە پاش x حەفتە بنوێنێت، گۆڕانی ژمارەی بینەرەکانی بدۆزەوە لە ئەنجامی پێشکەشکردنی حەفتەیەکی زیادە دوای 10 حەفتە لە نمایشکردن، پاشان دوای 20 حەفتە ئەو ئەنجامەی پێیگەیشتووی ڕوونبیکەوە.

ڕوانین بۆ دواوە

26 لەوێنەی بەرامبەر شێوازێکی ئەندازەیی دەردەکەوێت.



أ ژمارەی خاڵەکان لەسێ شێوەی دوای ئەم شێوانە لەو شێوازە بدۆزەوە.

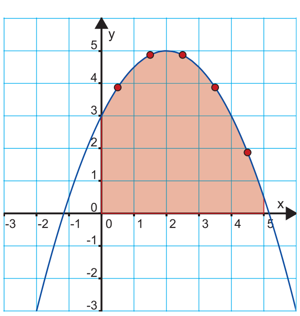
ب ئەگەر a_n ژمارەی خاڵەکانی شێوەی پلە n بێت لەو شێوازە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە لە $n=1$ بۆ $n=10$ بنووسە.

ج ئایا دەتوانیت ئەم یەکبەدوای یەکە پۆلێن بکەیت؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

د چەند خاڵ لەشێوەی پلە 100 هەیە؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

27 لەوێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$ و ئەو ناوچەی دەکەوێتە نێوان تەوەری y و ڕاستەهێڵی $x=5$ لەسەرەوەی تەوەری x و لەژێرەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەردەکەوێت. بەهای نزیککراوەی ڕووبەری ناوچەی ڕەنگکراو دەدۆزیتەوە.



أ ناوچەکە بۆ 5 لاکێشە دابەشبکە، بنکەی هەریەکێکیان 1 یەکە بێت، ژمارەی لاکێشەکان چەندە؟

ب درێژی هەر لاکێشەیەك بدۆزەوە، بەهۆی هەژمارکردنی بەهای نەخشەکە لەبەهای ئەو x ـەی دەکەوێتە ناوەڕاستی بنکەکەی. خشتەکە تەواوبکە.

x	$f(x)$
0.5	
1.5	
2.5	
4.5	

ج سەرجەمی ڕووبەرەکانی ئەو لاکێشانە، بەهای نزیککراوەیی ناوچە ڕەنگکراوەکە پێکدەهێنێت. ئەو بەهایە چەندە؟

وانەی 2

تەواوکاری

Integration



بێگومان ڕێساکانی داتاشراو دەزانیت، لەوانە

- ئەگەر $f(x)=k$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕە، ئەوا $f'(x)=0$.
- ئەگەر $f(x)=x^n$ کاتێك $n\neq 0$ ژمارەیەکی نەگۆڕە، ئەوا $f'(x)=nx^{n-1}$.
- ئەگەر $f(x)=e^{kx}$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕە، ئەوا $f'(x)=ke^{kx}$.
- ئەگەر $f(x)=\ln kx$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕە، ئەوا $f'(x)=\frac{k}{x}$.

ڕۆژێك پرسیوتە، ئایا کرداری داتاشراو کرداری پێچەوانەی هەیە، واتا ئەگەر $f(x)$ نەخشەیەك بێت، ئایا دەتوانیت نەخشەی $F(x)$ بدۆزیتەوەکە $f(x)$ داتاشراوەکەی بێت $F'(x)=f(x)$؟ دەتوانیت بیر لەکارەکە بکەیتەوە و هەوڵبدە پێچەوانەی کردارەکانی داتاشراو ئەنجام بدەیت.

بۆئەوەی داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^n$ بدۆزیتەوە، 1 لەتوانەکە n دەردەکەیت، و نەخشەکە لە توانە کۆنەکە دەدەیت و $f'(x)=nx^{n-1}$ دەستدەکەوێت. ئەگەر کرداری پێچەوانەی کرداری داتاشراوەکە جێبەجێبکەیت، پێویستە 1 کۆبکەیتەوە لەگەڵ توانەکە، و نەخشەکە بەسەر توانی نوێ دابەشبکەیت. و هەروەها.

- ئەگەر $f(x)=0$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، ئەوا $F(x)=k$.
- ئەگەر $f(x)=nx^{n-1}$ کاتێك $n\neq 0$ ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، ئەوا $F(x)=x^n$.
- ئەگەر $f(x)=ke^{kx}$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، ئەوا $F(x)=e^{kx}$.
- ئەگەر $f(x)=\frac{1}{x}$ ، ئەوا $F(x)=\ln x$.

بە نەخشەی وەك $F(x)$ دەوترێت نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەی $f(x)$.

ئامانجەکان

- تەواوکاری بێسنوور بۆ نەخشەیەك دەدۆزێتەوە.
- تەواوکاری سنووردار هەژماردەکات.
- تەواوکاری سنووردار و تەواوکاری بێسنوور بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

تەواوکاری بێسنوور
Indefinite integral

تەواوکاری سنووردار
Definite integral

نەخشەی بنەڕەت (دژی داتاشراو)
Antiderivative

نەگۆڕی تەواوکاری
Constant of integration

نموونە 1

بۆهەر نەخشەیەك $f(x)$ ، نەخشەی $F(x)$ بدۆزەوە کە پاسادانی $F'(x)=f(x)$ دەکات.

أ $f(x)=x^6$ ب $f(x)=\frac{5}{x}$ ج $f(x)=4e^{4x}$

شیكار

أ $F(x)=\frac{1}{6+1}x^{6+1}$ $F(x)=\frac{1}{7}x^{7}$

ب $F(x)=5\ln x$ ج $F(x)=e^{4x}$

هەوڵبدە **بۆهەر نەخشەیەكی** $f(x)$ **، نەخشەی** $F(x)$ **بدۆزەوە، كە پاسادانی** $F'(x)=f(x)$ **دەكات.**

أ $f(x)=x^{11}$ ب $f(x)=\frac{3}{x}$ ج $f(x)=5e^{5x}$

كاتێك لەداتاشراوی نەخشەیەك دەگەڕێیت، نەخشەیەكی تاكانە (تەنها یەك نەخشە) دەدۆزیتەوە، بەڵام كارەكە جیاوازە كاتێك دەتەوێت نەخشەی بنەڕەت بدۆزیتەوە، بۆ نموونە ئەگەر $f(x)=3x^2$ بۆ نمونە، ئەوا نەخشەی $F(x)=x^3$نەخشەیەكی بنەڕەتە بۆ نەخشەكە، هەروەها $G(x)=x^3+C$ نەخشەی بنەڕەتە بۆ نەخشەكە كاتێك C ژمارەیەكی ڕاستی بێت، چونكە:

$$G(x)=\left(x^3+C\right)'=\left(x^3\right)'+\left(C\right)'=3x^2+0=3x^2=f(x)$$

تەواوكاری بێسنوور

كرداری گەڕان بەدوای نەخشەی بنەڕەتی پێیدەوترێت تەواوكاری ئەوانەی لەبواری بیركاری كاردەكەن هێمایەكی تایبەت بۆ تەواوكاری بەكاردەهێنن، ئەویش بریتیەلە $\int$ و نووسینی$\int f(x)dx$ هێمایە بۆ نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەی $f(x)$ ئەگەر $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)$ بێت، ئەوا

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

كاتێك C ژمارەیەكی ڕاستییە پێیدەوترێت نەگۆڕی تەواوكاری.

تەواوكاری بێسنوور

تەواوكاری بێسنووری بۆ نەخشەی $f(x)$ بەشێوەی $\int f(x)dx$ دەنووسرێت،

واتە تەواوكاری بێسنوور هەر نەخشەیەكی بنەڕەتییە بۆ ئەم نەخشەیە.

زانیت داتاشراو ڕێسای هەیە. و لەبەرئەوەی تەواوكاری كرداری پێچەوانەی داتاشراوە، لەمەش ڕێسایەكانی تەواوكاری دەردەچێت لەم خشتەیە ژمارەیەك لە ڕێسایەكانی داتاشراو و ئەو ڕێسایانەی تەواوكاری كە لێی دەردەچن دەردەكەوێت.

ڕێسایەکانی تەواوکاری	ڕێسایەکانی داتاشراو
$\int 0dx = k$	$(k)' = 0$
$\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$	$(x^n)' = nx^{x-1}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$	$\left(e^{u(x)}\right)' = u(x) e^{u(x)}$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln n(x) + C$	$\left(\ln u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$
$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

نموونە 2 تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە.

أ $\int 4x^3 dx$ ب $\int (5x^4 - 2x^3) dx$ ج $\int \frac{3}{x} dx$ د $\int e^{-2x} dx$

شیکار

أ $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = 4\left(\frac{1}{4} x^{3+1}\right) + C = x^4 + C$

ب $\int (5x^4 - 2x^3) = \int 5x^4 dx - \int 2x^3 dx = x^5 - 2\left(\frac{1}{4} x^4\right) + C = x^5 - \frac{1}{2} x^4 + C$

ج $\int \frac{3}{x} dx = 3\int \frac{1}{x} dx = 3\ln x + C$

د $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int -2e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)' e^{(-2x)} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$

هەوڵبدە تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە.

أ $\int 3x^5 dx$ ب $\int (2x^5 + 7x^6) dx$ ج $\int \frac{5}{x} dx$ د $\int e^{3x} dx$

بەبیری خۆت بهێنەوە کە پێوانە پەراوێزکراوەکان لەئابووریدا بریتییە لە داتاشراوەکان. ئەگەر نەخشەیەکی پێوانەیی پەراوێزکراوت زانی، وەك تێچوونی پەراوێز بۆ بەرهەمهێنانی کاڵایەك بۆ نمونە دەتوانیت نەخشەی تێچوون بۆ بەرهەمهێنانی ئەو کاڵایە بدۆزیتەوە.

نموونە 3 دۆزینەوەی نەخشەی تێچوون

نەخشەی تێچوونی پەراوێز بۆ بەرهەمهێنانی کاڵایەك بریتییە لە $C_m(Q) = 3Q^2 - 20Q + 36$
نەخشەی تێچوونی بەرهەمهێنانی ئەو کاڵایە بدۆزەوە.

شیکار

نەخشەی تێچوونی ئەو کاڵایە بریتییە لە نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی تێچوونی پەراوێز.

$$
\begin{aligned}
C(Q) &= \int C_m(Q) dQ \\
&= \int (3Q^2 - 20Q + 36) dQ \\
&= \int 3Q^2 dQ - \int 20Q dQ + \int 36 dQ \\
&= Q^3 - 10Q^2 + 36Q + k
\end{aligned}
$$

K بریتییە لە نەگۆڕی تەواوکاری و دەکاتە نرخی تێچوون لە $Q = 0$ ، واتە تێچوونی نەگۆڕی بەرهەمهێنانە.

هەوڵبدە نەخشەی تێچوونی پەراوێز بۆ بەرهەمهێنانی کاڵایەك بریتییە لە:

$$C_m(Q) = 3Q^2 - 6Q + 5$$

نەخشەی تێچوونی بەرهەمهێنانی ئەو کاڵایە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت تێچوونی نەگۆڕی بەرهەمهێنان بریتییە لە 10 .

تەواوكاری سنووردار

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن بۆ هەژمارکردنی تەواوکاری سنووردار تەواوکاری بێسنوور بەکاردەهێن.

تەواوكاری سنووردار

تەواوکاری سنووردار بۆ نەخشەی $f(x)$ لەنێوان a و b بریتییە لە

$$\int_a^b f(x) = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

کاتێك $F(x)$ هێمایە بۆ نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی $f(x)$.

تێبینیبکە هەڵبژاردنی نەخشەی بنەڕەتی $F(x)$ بۆ نەخشەی $f(x)$ کار ناکاتە سەر بەهای تەواوکاری سنووردار. ئەگەر $G(x) = F(x) + C$ نەخشەیەکی بنەڕەتی تر بوو بۆ $f(x)$ ئەوا:

$$G(b) - G(a) = \left(F(b) + C\right) - \left(F(a) + C\right) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

نموونە 4 **دۆزینەوەی تەواوكاری سنووردار**

ئەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوە.

أ $\int_1^5 2x\,dx$ ب $\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)\,dx$ ج $\int_1^2 \frac{3}{x}\,dx$ د $\int_0^1 2e^x\,dx$

شیکار

أ $$\int_1^5 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^5 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$$

ب $$\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2 + 4\times 3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3 - \frac{3}{2}0^2 + 4\times 0\right]$$

$$= 9 - \frac{27}{2} + 12$$

$$= 9 - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{15}{2}$$

ج $$\int_1^2 \frac{3}{x}\,dx = \left[3\ln\right]_1^2 = 3\left[\ln x\right]_1^2 = 3(\ln 2 - \ln 1) = 3(\ln 2 - 0) = 3\ln 2$$

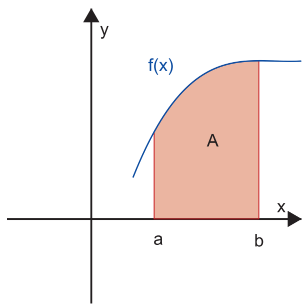
د $$\int_0^1 2e^x\,dx = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2\left[e^x\right]_0^1 = 2\left(e^1 - e^0\right) = 2(e - 1)$$

هەوڵبدە ئەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوە.

أ $\int_0^3 3x^2\,dx$ ب $\int_1^2 \left(3x^2+5x-4\right)dx$

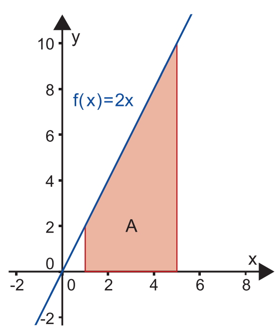
ج $\int_1^2 \frac{-2}{x}\,dx$ د $\int_1^2 -3e^x\,dx$

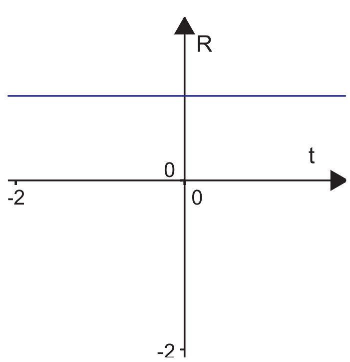
هەژمارکردنی ڕووبەر



ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن ئەمەیان سەلماندووە:
ئەگەر $f(x)\geq 0$ بەهای x هەرچەندێك بێت لەنێوان a و b ،
ئەوا تەواوکاری سنوورداری $\int_a^b f(x)dx$ دەکاتە ڕووبەری ئەو
ناوچەی سنووردراوە لەژێرەوە بەتەوەری x و لەسەرەوە
بەڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ و لە ڕاست و لە چەپ بەدوو
ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$.

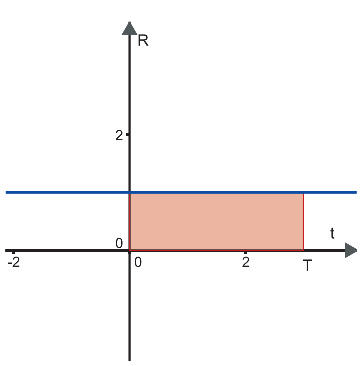
ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ نموونەی $\int_1^5 2xdx$ ئەوا ئەو تەواوکارییە سنووردراوە دەکاتە ڕووبەری
نیمچەلاتەریبە ڕەنگ کراوەکە.





هەندێك گۆڕاوی ئابووری وەك دەستکەوت(داهات)،
بەگۆڕانی کات دەگۆڕێت وادابنێ داهاتی دەزگایەك
دیاریدەکرێت بەتێکڕاییەکی نەگۆڕ بڕەکەی هەزار ملیۆن
دینارە لەساڵێکدا. دەتوانیت نەخشەی داهاتی پەراوێز
وەك نەخشەیەك بەپێی کات (بەساڵ) بنووسیت وەك:

$$R_m(t)=1000$$



ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشەیە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆییە.
سەرجەمی دەستکەوتووەکان لەنێوان ساڵی $t=0$ و $t=T$
چەندە ؟ دەکاتە $1000T$ ملیۆن دینار. دەتوانرێت ئەو
سەرجەمە بەناوچەی ڕەنگکراو لەوێنەی ڕوونکردنەوەی
بەرامبەر بنوێنرێت.

هەروەها دەتوانیت بەپێی پێشوو ڕوونیبکەینەوە کە تەواوکاری سنووورداری نەخشەی $R(t)=1000$ لەنێوان $t=0$ و $t=T$، واتا

$$\int_0^T 1000\,dt=\left[1000\,t\right]_0^T=1000\,T$$

لەوانەیە تێکرای داهات نەگۆڕنەبێت، و لەوانەیە بەپێی کات بگۆڕێت، بەمەش دەمانگەیەنێتە نەخشەی داهاتی پەراوێزی جیاواز لەنەخشەی نەگۆڕ. بەڵام سەرجەمی داهاتەکان لەنێوان دوو ماوەی $t=a$ و $t=b$ لەکات دەمێنێتەوە تەواوکاری سنووردار لەنێوان a و b دا بۆ نەخشەی داهاتی پەراوێز.

نموونە 5 نەخشەی $R_m(Q)=16200-2Q$ نەخشەی داهاتی پەراوێزی دەزگایەك دەنوێنێت. داهاتی دەزگاکە لەئەنجامی فرۆشتنی 1200 یەکە بدۆزەوە.

شیکار

داهات لەئەنجامی فرۆشتنی 1200 یەکە بریتییە لە

$$\int_0^{1200} R_m(Q)\,dQ$$

ئەو تەواوکارییە سنووردارە هەژماربکە.

$$\int_0^{1200} R_m(Q)\,dQ=\int_0^{1200}(16200-2Q)\,dQ$$

$$=\left[16200Q-Q^2\right]_0^{1200}$$

$$=18000\,000$$

هەوڵبدە نەخشەی تێچوونی پەراوێز بۆ دەزگایەك بریتییە لە $C_m(Q)=3Q^2-16Q+12$ تێچوونی بەرهەمهێنانی 600 یەکە بدۆزەوە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. پەیوەندی نێوان داتاشراو و تەواوکاری ڕوونبکەوە.
2. جیاوازییەکان نێوان تەواوکاری سنووردار و تەواوکاری بێسنوور ڕوونبکەوە.
3. تەواوکاری سنووورداری $\int_1^3 x\,dx$ ئەندازەییانە چی دەگەیەنێت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هەر تەواوکارییەکی بێسنوور بدۆزەوە.

4. $\int 4x^3dx$
5. $\int(3x^2-2x)dx$
6. $\int x^{-2}dx$
7. $\int e^{2x}dx$

ئەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوە.

8 $\int_1^3 4x^3dx$ **9** $\int_1^2 x^{-2}dx$

10 نەخشەی قازانجی دەزگایەك بدۆزەوە ئەگەر زانیت نەخشەی داهاتی پەراوێز بریتییە لە $R_m(Q)=22-2Q$ و نەخشەی تێچوونی پەراوێز بریتییە لە $C_m(Q)=2Q^2-6Q+6$ و تیاچوونێکی نەگۆڕ بۆ بەرهەمهێنان نییە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم تەواوکارییە بێ سنوورانە بدۆزەوە.

11 $\int(x^{-1}+x)dx$ **12** $\int(e^{ax}-1)dx$ $a\neq 0$

13 $\int\left(e^{-x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$ **14** $\int e^{kx}dx$ $k\neq 0$

ئەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوە.

15 $\int_1^4 -2x^2dx$ **16** $\int_{-1}^1(2x+e^{-x})dx$

17 نەخشەی تێچوونی پەراوێز بریتییە لە $C_m(Q)=3Q^2-28Q+84$ نەخشەی تێچوون بدۆزەوە ئەگەر زانیت تێچوونی نەگۆڕ بریتییە لە 92 .

18 نەخشەی داهاتی پەراوێز بریتییە لە $R_m(Q)=120-8Q$ نەخشەی داهات بدۆزەوە (تێبینی بکە داهات دەکاتە 0 لە $Q=0$).

19 نەخشەی پاشەکەوتی پەراوێز بۆ خێزانێك بریتییە لە $f(R)=0.5+\frac{1}{\sqrt{R}}$ ، کە R داهات دەنوێنێت. نەخشەی پاشەکەوتی ئەو خێزانە $F(R)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت کە پاشەکەوتەکە دەکاتە 20 کاتێك داهات دەکاتە 100 .

20 نەخشەی داهاتی پەراوێزی دەزگایەك دەکاتە $R_m(Q)=84-4Q$ نەخشەی داهاتی ئەو دەزگایە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت داهاتەکەی دەکاتە 0 لە $Q=0$.

21 نەخشەی بەکاربردنی پەراوێزی خێزانێك بریتییە لە $f(R)=0.5+\frac{2}{\sqrt{R}}$ ، کە R داهات دەنوێنێت. نەخشەی بەکاربردنی ئەو خێزانە $F(R)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت کە بەکاربردن دەکاتە 25 کاتێك داهات دەکاتە 25 .

22 نەخشەی داهاتی پەراوێز بریتییە لە $R_m(Q)=34-3Q$ و نەخشەی تێچوونی پەراوێز بریتییە لە $C_m(Q)=Q^2-10Q+26$ و تێچوونی نەگۆڕی بەرهەمهێنان نییە.

أ نەخشەی قازانجی ئەو دەزگایە بدۆزەوە.

ب هێندی Q چەندە کە بەرزترین ئاستی لەتوانای قازانج بۆ دەزگاکە دەستەبەر دەکات.

23 نەخشەی پەراوێز بۆ بەرهەمهێنانی کارگەیەك بریتییە لە $P(t) = Ae^{0.6t}$ ئەو هێندەی کارگەکە بەرهەمی دەهێنێت. لەنێوان ماوەی $t = 0$ و ماوەی $t = 1$ بدۆزەوە ، پاشان لە ماوەی نێوان $t = 1$ و ماوەی $t = 2$ ڕێژەی زیادەی بەرهەمهێنان لەماوەی دووەم بۆ ماوەی یەکەم بدۆزەوە؟

ڕوانین بۆ دواوە

24 نەخشەی داهات بۆ دەزگایەك بریتییە لە $R(Q) = 1400Q - 6Q^2$ و نەخشەی تێچوونی $C(Q) = 1500 + 80Q$. هێندی Q بدۆزەوە کە بۆ دەزگایەکە گەورەترین قازانج دەستەبەر دەکات.

25 نەخشەی داهاتی بۆ دەزگایەکە وەك خۆی مایەوە، واتا $R(Q) = 1400 - 6Q^2$ و نەخشەی تێچوون گۆڕا بۆ ئەوەی ببێتە $C(Q) = 3000 + 80Q$.

أ هێندی Q بدۆزەوە کە بەرزترین قازانج لەتوانا دایە بۆ دەزگایەکە دەستەبەر دەکات.

ب ئایا وەڵامەکەت جیاوازە لەوەڵامی پرسیاری 24 ؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

ڕوانین بۆ پێشەوە

26 ڕوونبکەوە کە ئەو هێندەی کە بەرزترین قازانج لەتوانادایە دەستەبەر دەکات بریتییە لەو هێندەی کە داهاتی پەراوێز یەکسان دەبێت بەتێچوونی پەراوێز.